# ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 13 | Dezember 1933 | Heft 6


Inhalt:


Seite

Hauptaufsätze. W. Müller: Laminare Ausbreitungsvorgänge in der zähen Flüssigkeit . . . 395

M. Medici: Beitrag zur thermodynamischen Berechnung der Schornsteine . . . . . . . . . . 409

G. Ackermann: Eine neue Methode zur Integration der linearen, partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung vom hyperbolischen Typus . . . . . . 416

Vorträge der Hauptversammlung in Würzburg der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik: Barth, Beyer, Flügge, Fromm, Gebelein, Hermann, Klotter, Köhler und Ramspeck, König, Ludwig, Marguerre, Neuber, Schmeidler, Schuler, Vogelpohl, Weinblum, Weinig . . . . . . . . . . . . . . . . . 422

Kleine Mitteilungen. R. Neuendorff: Zeichnerische Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung mittels Funktionsteilungen 450

O. Wilski: Über die Ableseunsicherheit an ungleichmäßig geteilten Skalen (insbesondere am Rechenschieber) . . . . . . . . . . . . . . . 451

Buchbesprechungen. Kowalewski: Interpolation und genäherte Quadratur. — Frank: Das Kausalgesetz und seine Grenzen. — Planck: Wege zur physikalischen Erkenntnis. — Föppl †: Vorlesungen über Technische Mechanik. — Jordan: Statistische Mechanik auf quantentheoretischer Grundlage. — v. Mises: Fluglehre. — Altmann: Schraubgetriebe, ihre mögliche und zweckmäßigste Ausbildung. — Vogel: Eingriffsgesetze und analytische Berechnungsgrundlagen des zylindrischen Schneckentriebes mit geradflankigem Schnecken-Achsenschnitt. — Buckingham: Stirnräder mit geraden Zähnen. — Weiter eingegangene Bücher . . . . . . . . . . . . 452

Nachrichten . . . . . . . . . . . . . . 456

Zuschriften an den Herausgeber . . . . 456


# HAUPTAUFSÄTZE

## Laminare Ausbreitungsvorgänge in der zähen Flüssigkeit[1].


Von *Wilhelm Müller* in Prag.


**1. Die Grundgleichungen.** Bekanntlich lassen sich die Differentialgleichungen für die instationäre Bewegung einer zähen Flüssigkeit besonders dann vollständig und ohne Vernachlässigung integrieren, wenn die Geschwindigkeits- und Druckverteilungen außer von der Zeit nur von einer Ortskoordinate abhängig sind[2]). Unter den möglichen eindimensionalen Bewegungen dieser Art werden wir insbesondere drei Typen näher betrachten: die geradlinige bzw. in konzentrischen Kreisen verlaufende, ebene und die geradlinige rotationssymmetrische Strömung.

Wenn wir neben der Geschwindigkeit $v$ noch die Rotationsgeschwindigkeit oder Wirbelstärke der Flüssigkeit

$$w = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathfrak{v}$$

sowie die kinematische Zähigkeit $\nu$ einführen, so haben wir im ersten Fall das Gleichungssystem

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial v}{\partial t} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\mathrm{I}), \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial w}{\partial t} \quad . \; . \; . \; . \quad (\mathrm{I\,a}).$$

Benutzen wir Polarkoordinaten $(r, \varphi)$, so geht die auf die zirkulare Koordinate $\varphi$ bezogene Gleichung für $v_\varphi = v$ mit $v_r = 0$ und $\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$ über in

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial v}{\partial t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\mathrm{II}),$$

während die daraus durch Rotoroperation zu gewinnende Gleichung für $w_z = w = \frac{1}{2r}\frac{\partial (r\, v)}{\partial r}$ die Form erhält:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial w}{\partial t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\mathrm{II\,a}).$$

[1]) Vgl. auch den kurzen Bericht des Verfassers in den Verhandlungen des Intern. Mathematiker-Kongresses Zürich 1932, Bd. II, S. 316.

[2]) Vgl. Wilh. Müller: Einführung in die Theorie der zähen Flüssigkeiten, Leipzig 1932.

Liegt dagegen der Fall einer linearen, achsensymmetrischen Strömung vor, so hat man für die Geschwindigkeit $v$ in der axialen Richtung und für die Stärke des Ringwirbels $w = w_\varphi = -\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial r}$ folgende, außer von der Zeit nur von der radialen Zylinderkoordinate $r$ abhängigen Gleichungen

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial v}{\partial t} \quad \ldots \quad \text{(III)}, \qquad \Delta w - \frac{w}{r^2} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial w}{\partial t} \quad \ldots \quad \text{(IIIa)}.$$

Die beiden letzten Fälle zeigen eine bemerkenswerte Reziprozität zwischen den Gleichungsformen für $v$ und $w$, aus der sich die Möglichkeit ergibt, die entsprechenden Lösungen für den einen Fall aus denen des anderen zu konstruieren. Eine besondere Erleichterung für die Auflösung aller sechs Gleichungen (I) bis (III) bietet der Umstand, daß sie linear sind, also das Superpositionsprinzip Gültigkeit hat, vorausgesetzt, daß bei der Zusammensetzung die Linearität, Kreis- bzw. Achsensymmetrie gewahrt bleibt. Wir werden einige bemerkenswerte Beispiele für die drei Strömungsarten angeben, die sich aus bestimmten, zur Zeit $t = 0$ gültigen Wirbelverteilungen herleiten lassen und insbesondere über die zeitliche Veränderung bzw. Ausbreitung von Wirbelschichten und kielwasserartigen Unstetigkeiten infolge der Zähigkeit des flüssigen Mediums Aufschluß geben[3]. Die Ausführungen bieten eine Ergänzung zu den von der Prandtlschen Schule vor einiger Zeit unternommenen Ansätzen für turbulente Ausbreitungsbewegungen[4], die bekanntlich nicht mehr mit den Stokes-Navierschen Gleichungen im Einklang stehen, sondern aus anderen physikalischen Voraussetzungen gewonnen werden. Sie dürften auch insofern von besonderem Interesse sein, als sie mannigfache Analogien zu anderen Gebieten der Physik (z. B. zur Wärmeleitungstheorie) enthalten und wohl auch eine Anwendung zulassen auf die strengere Behandlung des Grenzschichtproblems für schwach reibende Flüssigkeiten, dessen Verwandtschaft mit der Wärmeleitung neuerdings mehrfach hervorgehoben und benutzt worden ist[5].

**2. Auflösung eines idealen ebenen Kielwassers bzw. eines aus einem Schlitz austretenden freien Flüssigkeitsstrahles.** Aus Gründen der Anschaulichkeit scheint es zunächst zweckmäßig, von der Gl. (IIa) auszugehen, weil sie als einfachste Lösung das aus der Wärmeleitungstheorie bekannte Integral

$$w = \frac{\Gamma}{8\pi\nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

liefert, das die von einem in $r = 0$ gelegenen elementaren Stabwirbel ausgehende Bewegung darstellt und daher zum Aufbau aller von Wirbeln erzeugten ebenen Strömungen verwendet werden kann. Für die entsprechende, mit der Zeit veränderliche Geschwindigkeitsverteilung erhält man daraus den Ausdruck

$$v = \frac{2}{r}\int_0^r r w \, dr = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2),$$

aus dem man erkennt, daß $\Gamma$ die Zirkulation oder das auf die gesamte Ebene sich ausbreitende, seinem Betrage nach unveränderliche Wirbelmoment bedeutet. Indem wir in bezug auf die ausführliche Diskussion der Ausdrücke 1. und 2. und die zeichnerische Darstellung des Bewegungsverlaufs auf die angeführten Arbeiten des Verfassers[6] verweisen, möchten wir hier nur als Hauptergebnis anführen, daß die anfänglich unendlich große Geschwindigkeit im Mittelpunkt augenblicklich auf den Wert Null herabsinkt, also hier in Übereinstimmung mit der Beobachtung ein Ruhepunkt entsteht, daß sich ferner der Kreis, auf dem die Geschwindigkeit einen Größtwert hat, mit konstanter Flächengeschwindigkeit erweitert, während das Maximum selbst um so kleiner wird, je weiter der Punkt vom Zentrum entfernt liegt.

Unsere gegenwärtige Aufgabe besteht nun darin, zusammengesetzte Integrale zu gewinnen, insbesondere die Fälle einer unendlich ausgedehnten ebenen und einer kreiszylindrischen

[3] Eine wesentlich andere Auffassung im Sinne der Grenzschichttheorie wird entwickelt in der Arbeit von H. Schlichting: Laminare Strahlausbreitung, Z. f. a. M. u. M., 1933 (H. 4), S. 260 bis 263.

[4] Die entsprechenden Meßresultate sind mitgeteilt in: Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen, herausgeg. von L. Prandtl, II. Lieferung, München 1923, S. 69 bis 77; unter den theoretischen Untersuchungen sind zu nennen: W. Tollmien: Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge, Z. f. ang. Math. u. Mech., Bd. 6 (1926), S. 468 bis 478; Handbuch der Experimentalphysik, Bd. 4, 1. Teil (herausgeg. von L. Schiller), Leipzig 1931, S. 309 bis 325. Vgl. auch P. Ruden: Turbulente Ausbreitungsvorgänge im Freistrahl, Die Naturwissenschaften 1933, Heft 21/23, S. 375 bis 378.

[5] Vgl. R. v. Mises: Bemerkungen zur Hydrodynamik, Z. f. a. M. u. M., Bd. 7 (1927), S. 425 bis 431.

[6] Wilh. Müller: Zum Problem der Wirbelbewegung in der zähen Flüssigkeit, Festschrift der 125-Jahrfeier der Deutschen Technischen Hochschule Prag, H. D. I. Mitteilungen des Hauptver. d. Ing. in der Tschechosl. Rep., Jahrg. 1931, Heft 21 bis 22, Brünn 1931; Einführung in die Theorie der zähen Flüssigkeiten, Leipzig 1932, S. 104 bis 120.

Wirbelschicht zu behandeln. Wenn wir die Dichte der ebenen Schicht mit $\gamma$ bezeichnen, so ergibt sich für $w$ das Integral

$$w = \frac{\gamma}{8\pi\nu t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2+(x-\xi)^2}{4\nu t}}\,d\xi = \frac{\gamma}{8\pi\nu t}\,e^{-\frac{y^2}{4\nu t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\nu t}}\,d\xi$$

oder nach Ausführung der Integration

$$w = \frac{\gamma}{4\sqrt{\pi\nu t}}\,e^{-\frac{y^2}{4\nu t}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

während die Geschwindigkeit unmittelbar durch das Fehlerintegral

$$v = \frac{\gamma}{2}\,F_e\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

dargestellt wird.

Legen wir weiter zwei parallele, absolut gleiche und entgegengesetzt drehende Wirbelschichten zugrunde, die den Abstand $2a$ haben, und lassen wir die $x$-Achse mit der Mittelparallelen zwischen den Schichtspuren zusammenfallen, so wird die Wirbelstärke in einem beliebigen Feldpunkt

$$w = \frac{\gamma}{4\sqrt{\pi\nu t}}\left[e^{-\frac{(y-a)^2}{4\nu t}} - e^{-\frac{(y+a)^2}{4\nu t}}\right] = \frac{\gamma}{2\sqrt{\pi\nu t}}\,e^{-\frac{y^2+a^2}{4\nu t}}\cdot \mathfrak{Sin}\,\frac{y\,a}{2\,\nu\,t} \quad \ldots \quad (5)$$

und die Geschwindigkeit $v = v_x$

$$v = \frac{\gamma}{2}\left[F_e\left(\frac{y+a}{2\sqrt{\nu t}}\right) - F_e\left(\frac{y-a}{2\sqrt{\nu t}}\right)\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Man sieht dann ohne weiteres, daß die Geschwindigkeitsverteilung zur Zeit $t = 0$ unstetig ist. Während nämlich in allen Punkten außerhalb des Kielwasserstreifens ($y^2 > a^2$) die Flüssigkeit anfangs in Ruhe ist ($F_e(\infty) = 1$), addieren sich im Innern des Streifens ($y^2 < a^2$) wegen

$$F_e(z) = -F_e(-z)$$

die von beiden Schichten herrührenden Geschwindigkeiten, so daß hier $v = \gamma =$ konst zu setzen ist. In der Wirbelschicht selbst herrscht dagegen der mittlere Geschwindigkeitswert $v = \frac{\gamma}{2}$.

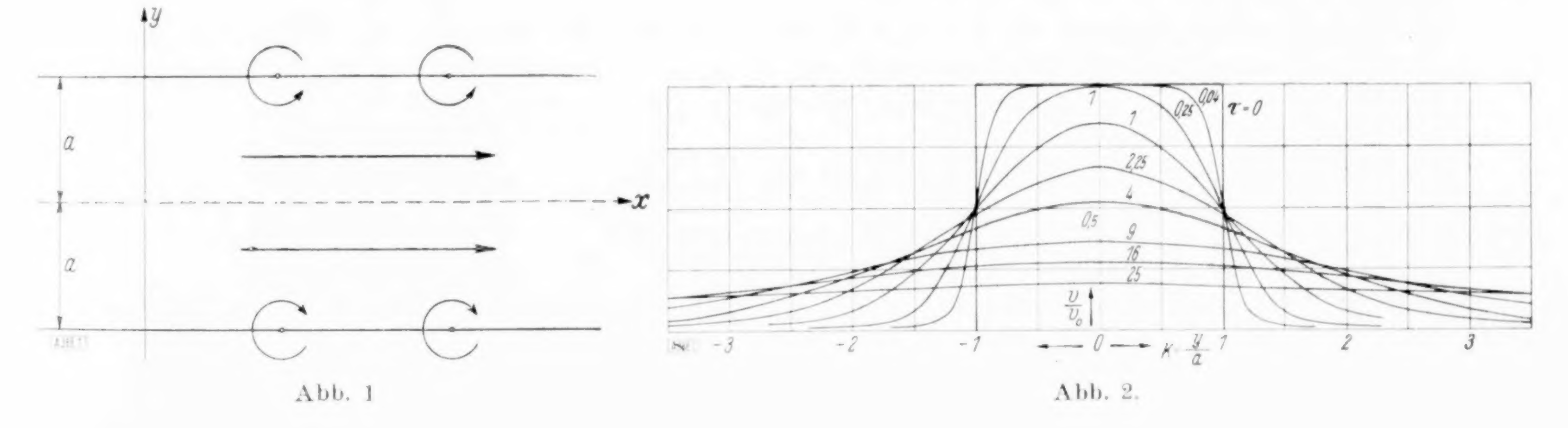



Abb. 1 Abb. 2.

Wir haben in der Abb. 2 die weitere mit wachsender Zeit sich einstellende Geschwindigkeitsverteilung zeichnerisch dargestellt und dabei die dimensionslosen Größen

$$\frac{4\nu t}{a^2} = \tau\,, \qquad \frac{y}{a} = \varkappa$$

zugrunde gelegt, mit deren Einführung der Ausdruck für $v$ in

$$v = \frac{\gamma}{2}\left[F_e\left(\frac{\varkappa+1}{\sqrt{\tau}}\right) - F_e\left(\frac{\varkappa-1}{\sqrt{\tau}}\right)\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6a)$$

übergeht. Man sieht, daß die Geschwindigkeit im Kielwasser zunächst in der Nähe der Grenzen oder der Unstetigkeitsstellen abfällt, während sie sich in der Mitte in der Umgebung des Maximums länger hält. Gleichzeitig breitet sich die Bewegung auf das Gebiet außerhalb des Streifens aus, und man kann leicht nachweisen, daß an jeder Stelle $|y| > a$ zunächst ein Anstieg bis zu einem größten Wert, und dann ein Abfall der Geschwindigkeit bis auf den

Wert Null eintritt. Das Maximum entspricht, wie man durch Ableitung sofort feststellt, der Gleichung

$$\frac{a}{y} = \frac{1}{\varkappa} = \mathfrak{Tg}\,\frac{y\,a}{2\,\nu\,t} = \mathfrak{Tg}\,\frac{2\,\varkappa}{\tau},$$

woraus

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\,\varkappa}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{1}{\varkappa} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

sich ergibt. Das aus (7) zu berechnende $\varkappa$ bezieht sich gleichzeitig auf diejenigen Stellen, für die die Wirbelstärke $w$ einen größten Wert erreicht.

Die durch (5) und (6) dargestellte Bewegung wird nun angenähert dadurch realisiert, daß ein Flüssigkeitsstrahl aus einem genügend langen Schlitz in eine gleiche ruhende Flüssigkeit eintritt oder daß ein zylindrischer Körper, etwa eine ebene Platte oder ein Kreiszylinder senkrecht zu den Erzeugenden durch eine Flüssigkeit sich bewegt. Im ersten Fall haben wir, wie die analogen Messungen für den turbulenten Fall ergeben, an der Eintrittsstelle des Strahles eine Unstetigkeit der Geschwindigkeit, die nahezu den Charakter hat, wie er unseren Formeln für $t = 0$ entspricht. In größeren Abständen von dem Eintritt wird der Strahl bereits die angrenzende Flüssigkeit mit in Bewegung gesetzt haben durch Vermittlung der Reibung, die gleichzeitig auf die Energie des Strahles eine Bremswirkung ausübt und schließlich die ganze Bewegung mehr und mehr aufzehrt. Man sieht also, daß die theoretisch gefundenen Bewegungszustände in den verschiedenen Zeitpunkten etwa den Zuständen in wachsenden Abständen von der Eintrittsstelle des Strahles entsprechen.

Wenn $a$ gegen Null, $\gamma$ gegen $\infty$ geht, während gleichzeitig die anfänglich durch den Schlitz gehende Menge $2\,a \cdot \gamma = q$ endlich bleibt, so erhalten wir aus (5) und (6) die Formeln für den Fall des ebenen „Flachstrahles"

$$w = \frac{q\,y}{8\sqrt{\pi}\,(\nu\,t)^{\frac{3}{2}}}\,e^{-\frac{y^2}{4\,\nu\,t}} \qquad v = \frac{q}{2\sqrt{\pi\,\nu\,t}}\,e^{-\frac{y^2}{4\,\nu\,t}}.$$

**3. Auflösung einer kreiszylindrischen Wirbelschicht.** Etwas größere mathematische Schwierigkeiten bietet der Fall einer ebenen Kreisströmung, die erzeugt wird von einer für $t = 0$ auf einem Kreiszylinder gleichmäßig ausgebreiteten Wirbelschicht, d. h. einer kontinuierlichen Folge von Wirbelfäden, die in die Erzeugenden des Zylinders fallen. Ich werde bei der Besprechung dieses Falles Gelegenheit nehmen, die in den angeführten Arbeiten gegebenen Entwicklungen mathematisch wesentlich zu vervollständigen und auch für verwandte Bewegungsfälle die rechnerischen Grundlagen zu schaffen.

Wenn man den Ausdruck (1) für den Elementarwirbel benutzt und die Wirbeldichte pro Längeneinheit $\gamma$ nennt, so erhält man zunächst $w$ in der unmittelbar verständlichen Form

$$w = \frac{\gamma\,a}{8\,\pi\,\nu\,t}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{[r^2 + a^2 - 2\,r\,a\cos(\varphi - \vartheta)]}{4\,\nu\,t}}\,d\varphi$$

oder mit $\varphi - \vartheta = \delta$

$$w = \frac{\gamma\,a}{8\,\pi\,\nu\,t}\,e^{-\frac{r^2 + a^2}{4\,\nu\,t}}\int_0^{2\pi} e^{\frac{r\,a\cos\delta}{2\,\nu\,t}}\,d\delta.$$

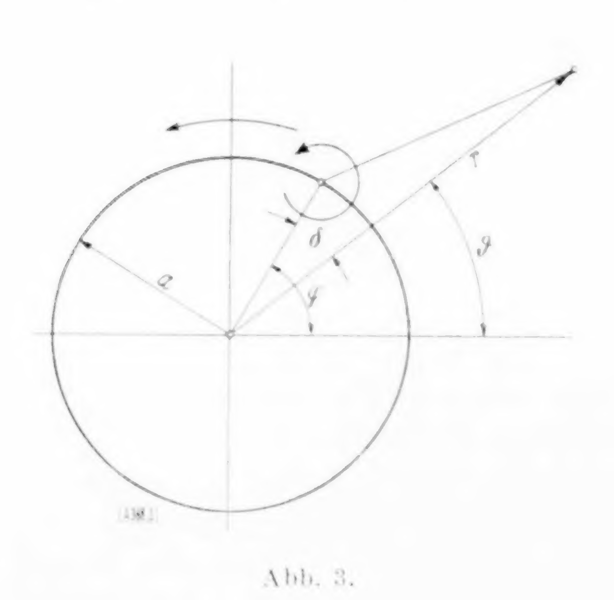


Abb. 3.

Benutzt man die bekannte Integraldarstellung für die Besselsche Funktion nullter Ordnung mit rein imaginärem Argument[7])

$$J_0(i\,z) = I_0(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{z\cos\delta}\,d\delta,$$

so ergibt sich daraus der Ausdruck[8])

$$w = \frac{\gamma\,a}{4\,\nu\,t}\,e^{-\frac{r^2 + a^2}{4\,\nu\,t}} \cdot I_0\left(\frac{r\,a}{2\,\nu\,t}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

[7]) Vgl. etwa A. Gray a. G. B. Mathews: A Treatise on Bessel Functions, London 1922, S. 68.

[8]) Dieser Ausdruck findet sich, wie ich nachträglich bemerkt habe, schon bei Lord Rayleigh: Problems on the conduction of Heat, Philos. Mag., Vol 22 (6), 1911, S. 383; Scientif. Papers VI (1920), S. 51—64.

Man kann dann leicht mit Hilfe der asymptotischen Darstellung von $I_0$ für große Argumente ($t \to 0$)

$$\lim_{z \to \infty} I_0(z) \Big/ \frac{e^z}{\sqrt{2 \pi z}} = 1$$

zeigen, daß $w$ für $t \to 0$ in allen Punkten $r \neq a$ verschwindet und das auf die ganze Ebene erstreckte Wirbelmoment

$$4 \pi \int_0^\infty w\, r\, d r$$

der anfänglichen Zirkulation $2 \pi a \cdot \gamma$ gleich ist. Für die Geschwindigkeit erhalten wir zunächst den Integralausdruck

$$v = \frac{2}{r} \int_0^r w\, r\, d r = \frac{\gamma a}{2 r \nu t} \int_0^r r\, e^{-\frac{r^2 + a^2}{4 \nu t}} \cdot I_0\left(\frac{r a}{2 \nu t}\right) d r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

den wir noch weiter umformen werden. Beide Ausdrücke (8) und (9) lassen sich auch der allgemeinen Form der Lösungen der Gl. (II) und (IIa) unterordnen und mit dem bekannten Bessel-Fourierschen Theorem in Verbindung bringen. Setzt man nämlich

$$w = e^{-\lambda^2 \nu t} \cdot \chi(r)\,; \quad v = e^{-\lambda^2 \nu t} \cdot \varphi(r)\,,$$

so genügen die Funktionen $\chi(r)$ und $\varphi(r)$ den Differentialgleichungen für die Besselschen Funktionen nullter und erster Ordnung. Als allgemeine Summenform für $w$ und $v$ ergeben sich dann die Ausdrücke

$$w = \sum_i e^{-\lambda_i^2 \nu t} \cdot C(\lambda_i) \cdot J_0(\lambda_i r)\,; \quad v = \sum e^{-\lambda_i^2 \nu t} \cdot C'(\lambda_i) \cdot J_1(\lambda_i r)\,,$$

wenn man verlangt, daß beide Funktionen für $r \to \infty$ verschwinden sollen. Ebenso wie aus der Fourierschen Reihe lassen sich auch aus diesen Besselschen Reihen Integralausdrücke gewinnen, die dann einer vorgeschriebenen Anfangsverteilung angepaßt werden können. So hat man z. B. für $v$ die allgemeine Darstellung

$$v = \int_0^\infty d \lambda \int_{r_1}^{r_2} e^{-\lambda^2 \nu t}\, \lambda\, \varrho\, F(\varrho)\, J_1(\lambda \varrho)\, J_1(\lambda r)\, d \varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Wenn die Funktion $F(\varrho)$ im Gebiet $r_1 > \varrho > r_2$ stetig oder stückweise stetig ist, endliche Unstetigkeiten und nur eine endliche Anzahl von Extremwerten besitzt, so wird für $t \to 0$

$$v = \frac{1}{2}\,[F(r - 0) + F(r + 0)] \quad \text{für } r_1 > r > r_2$$

$$v = 0 \quad \text{für } r_2 > r < r_1$$

$$v = \frac{1}{2}\, F(r_1 + 0) \quad \text{für } r = r_1\,; \quad v = \frac{1}{2}\, F(r_2 - 0) \quad \text{für } r = r_2\,.$$

Mit Hilfe dieses Satzes[9]) gelingt es sofort, in unserem Falle die Darstellung von $v$ zu gewinnen. Da nämlich der idealen Wirbelschicht auf dem Kreise die Geschwindigkeitsverteilung $v = F(\varrho) = \frac{\gamma a}{\varrho}$ für $\varrho > a$, d. h. außerhalb des Kreises, und $v = 0$ für $\varrho < a$, d. h. im Innern des Kreises, entspricht, so hat man $r_1 = a$ und $r_2 = \infty$ zu setzen und gewinnt dann die Darstellung

$$v = a \gamma \int_0^\infty d \lambda \int_a^\infty \lambda\, e^{-\lambda^2 \nu t}\, J_1(\lambda \varrho)\, J_1(\lambda r)\, d \varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9a).$$

Wenn wir die Integration nach $\varrho$ ausführen mit Hilfe der Formel

$$J_0(\lambda \varrho) = -\lambda \int J_1(\lambda \varrho)\, d \varrho$$

und berücksichtigen, daß $J_0$ für unendlich große Argumente verschwindet, so reduziert sich das Integral auf

$$v = a \gamma \int_0^\infty e^{-\lambda^2 \nu t}\, J_1(\lambda r)\, J_0(\lambda a)\, d \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9b).$$

[9]) Vgl. Gray a. Mathews: A. a. O. S. 97.

Benutzt man schließlich noch die Differentialbeziehung

$$J_1(\lambda r) = \frac{1}{r}\int_0^r r\lambda\, J_0(\lambda r)\, dr$$

und die aus der Theorie der Besselschen Funktionen bekannte, zuerst von Sonine[10]) angegebene allgemeine Formel

$$\int_0^\infty \lambda\, e^{-\lambda^2 \nu t} J_n(\lambda r)\, J_n(\lambda a)\, d\lambda = \frac{1}{2\nu t} e^{-\frac{r^2+a^2}{4\nu t}} \cdot I_n\left(\frac{r a}{2\nu t}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11),$$

in der

$$I_n(z) = i^{-n} \cdot J_n(iz)$$

gesetzt ist, so geht 9b über in den oben auf synthetischem Wege abgeleiteten Ausdruck (9), dessen Gültigkeit daher bestätigt ist.

**4. Einführung der Reihenfunktionen $U_n$ und $V_n$.** Zur weiteren Umformung des Ausdrucks (9) gehen wir aus von den auch für andere Fälle brauchbaren Integralen

$$A_{n,m} = \frac{1}{2\nu t}\int_0^a e^{-\frac{\varrho^2}{4\nu t}} \cdot I_n\left(\frac{r\varrho}{2\nu t}\right)\varrho^m\, d\varrho; \qquad B_{n,m} = \frac{1}{2\nu t}\int_0^r e^{-\frac{\varrho^2}{4\nu t}} \cdot I_n\left(\frac{a\varrho}{2\nu t}\right)\varrho^m\, d\varrho,$$

die durch Vertauschung von $r$ und $a$ ineinander übergehen. Setzt man darin

$$\varrho\, e^{-\frac{\varrho^2}{4\nu t}} d\varrho = -2\nu t\, d\left(e^{-\frac{\varrho^2}{4\nu t}}\right),$$

und benutzt die bekannten Differentialformeln

$$d\,[z^n I_n(z)] = z^n I_{n-1}(z); \quad d\left[\frac{I_n(z)}{z^n}\right] = \frac{I_{n+1}}{z^n}\, dz,$$

so erhält man durch partielle Integration z. B.

$$A_{n,n+1} = -\left[\varrho^n e^{-\frac{\varrho^2}{4\nu t}} \cdot I_n\left(\frac{r\varrho}{2\nu t}\right)\right]_0^a + \frac{r}{2\nu t}\int_0^a e^{-\frac{\varrho^2}{4\nu t}} \cdot I_{n-1}\left(\frac{r\varrho}{2\nu t}\right)\varrho^n\, d\varrho,$$

also wegen $I_n(0) = 0$ für $n > 0$, $I_0(0) = 1$ die Rekursionsformeln

$$\left.\begin{aligned} A_{n-1,n} &= \frac{a^n}{r} e^{-\frac{a^2}{4\nu t}} \cdot I_n\left(\frac{a r}{2\nu t}\right) + \frac{1}{r} A_{n,n+1} \quad (n > 0) \\ A_{1,0} &= \frac{1}{r} e^{-\frac{a^2}{4\nu t}} \cdot I_0\left(\frac{a r}{2\nu t}\right) - \frac{1}{r}(1 - A_{0,1}) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12).$$

Ebenso wird

$$\left.\begin{aligned} B_{n-1,n} &= \frac{r^n}{a} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \cdot I_n\left(\frac{a r}{2\nu t}\right) + \frac{1}{a} B_{n,n+1} \quad (n > 0) \\ B_{1,0} &= \frac{1}{a} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \cdot I_0\left(\frac{a r}{2\nu t}\right) - \frac{1}{a}(1 - B_{0,1}) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12a).$$

Ist $m < 0$, so ergibt sich nach derselben Methode wegen

$$\lim_{z \to 0} \frac{I_n(z)}{z^n} = \frac{1}{2^n \cdot n!}$$

die weitere Rekursionsformel

$$B_{n,1-n} = \left(\frac{a}{4\nu t}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \cdot \frac{I_n\left(\frac{a r}{2\nu t}\right)}{r^n} + a\, B_{n+1,-n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12b).$$

[10]) Vgl. Gray a. Mathews: A. a. O. S. 69; N. Sonine: Math. Ann. Bd. XVI (1880), S. 53.

Durch Benutzung der Formeln (12a) und (12b) gewinnt man nun für die Geschwindigkeit (9) folgende beiden Ausdrücke

$$v = \frac{\gamma a}{r} \cdot B_{0,1} e^{-\frac{a^2}{4\nu t}} = \frac{\gamma a}{r} e^{-\frac{a^2+r^2}{4\nu t}} \cdot V_1 = \frac{\gamma a}{r}\left[1 - e^{-\frac{a^2+r^2}{4\nu t}} \cdot U_0\right] \qquad (13),\ (13\text{a}),$$

wenn man zur Abkürzung für die auftretenden Reihenfunktionen mit zwei Variablen die Bezeichnungen

$$U_n = \sum_{m=n}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^m I_m\left(\frac{a r}{2\nu t}\right); \qquad V_n = \sum_{m=n}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^m I_m\left(\frac{a r}{2\nu t}\right)$$

einführt[11]). Gleichzeitig resultiert die grundlegende Beziehung

$$U_0 = I_0 - V_0 + e^{\frac{r^2+a^2}{4\nu t}} = e^{\frac{r^2+a^2}{4\nu t}} - V_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14),$$

die erkennen läßt, daß auch die übrigen $V$-Funktionen durch die $U$-Funktionen darstellbar sind. Was diese Funktionen selbst angeht, so ergibt sich zunächst, daß sie für alle endlichen Werte von $r$ einschließlich Null und $t \neq 0$ konvergieren. Denn wir haben für ganzzahlige $n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{n+1}(z)}{I_n(z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2} z \cdot n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2} z}{n+1},$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \cdot I_{n+1}}{\left(\frac{a}{r}\right)^{n} \cdot I_{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a^2}{4\nu t} \cdot \frac{1}{n+1}\right) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{r}{a}\right)^{n+1} \cdot I_{n+1}}{\left(\frac{r}{a}\right)^{n} \cdot I_{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{r^2}{4\nu t} \cdot \frac{1}{n+1}\right) = 0.$$

Die Formeln (12) und (12a) liefern übrigens eine einfache Integraldarstellung. Multipliziert man nämlich mit $e^{\frac{a^2}{4\nu t}}$ bzw. mit $e^{\frac{r^2}{4\nu t}}$, so kommt ohne weiteres

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= e^{\frac{a^2}{4\nu t}} + \frac{r}{2\nu t}\int_0^a e^{\frac{a^2-\varrho^2}{4\nu t}} I_1\left(\frac{r\varrho}{2\nu t}\right) d\varrho \\ U_n &= \frac{1}{r^{n-1}\cdot 2\nu t}\int_0^a I_{n-1}\left(\frac{r\varrho}{2\nu t}\right) e^{\frac{a^2-\varrho^2}{4\nu t}} \varrho^n\, d\varrho \quad (n>0) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (15),$$

$$\left.\begin{aligned} V_0 &= e^{\frac{r^2}{4\nu t}} + \frac{a}{2\nu t}\int_0^r e^{\frac{r^2-\varrho^2}{4\nu t}} \cdot I_1\left(\frac{a\varrho}{2\nu t}\right) d\varrho \\ V_n &= \frac{1}{a^{n-1}\cdot 2\nu t}\int_0^r e^{\frac{r^2-\varrho^2}{4\nu t}} \cdot I_{n-1}\left(\frac{a\varrho}{2\nu t}\right) \varrho^n\, d\varrho \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (15\text{a}).$$

[11]) Die Reihen haben ein ähnliches Bildungsgesetz wie die von Lommel in seinen klassischen Arbeiten zur Beugungstheorie benutzten Reihen: vgl. Abhandlungen der Kgl. bayr. Akad. der Wiss., Bd. XV (1886), S. 229 bis 328, 529 bis 664. Eine ausführliche Darstellung der Eigenschaften der Lommelschen Funktionen findet sich in G. N. Watson. A Treatise on the theorie of Bessel Functions, Cambr. 1922, S. 541 ff.

Setzen wir $t$ als von Null verschieden voraus, so gewinnt man für verschwindende $r$ folgende Grenzwerte:

$$(V_0)_{r \to 0} = 1\,; \quad (U_0)_{r \to 0} = (I_0 - V_0)_{r \to 0} + e^{\frac{a^2}{4\nu t}} = e^{\frac{a^2}{4\nu t}} \quad \ldots \ldots \quad (16).$$

Für unbegrenzt wachsendes $r$ geht $U_0$ in den asymptotischen Wert der Funktion $I_0$ über, d. h. wir haben

$$(U_0)_{r \to \infty} \sim \sqrt{\frac{\nu t}{\pi r a}} \cdot e^{\frac{r a}{2\nu t}} \quad \ldots \ldots \quad (17),$$

während $V$ sich nach (14) für $r \to \infty$ wie die Funktion $e^{\frac{r^2}{4\nu t}}$ verhält. Ebenso geht für $t \to 0$, d. h. für endliches $r$, aber unbegrenzt wachsende Argumente die Funktion $U_0$ in den asymptotischen Wert von $I_0$ über.

Schließlich lassen sich die Reihen $U_0$ und $V_0$ für $r = a$ in endlicher Form summieren. Man erhält in diesem Fall[12])

$$(U_0)_{r=a} = (V_0)_{r=a} = \frac{1}{2}\left[I_0\left(\frac{a^2}{2\nu t}\right) + e^{\frac{a^2}{2\nu t}}\right] \quad \ldots \ldots \quad (18).$$

Mit Hilfe dieser Grenzwerte läßt sich nun ohne weiteres bestätigen, daß der unter (13) gegebene Geschwindigkeitsausdruck die geforderten Anfangsbedingungen erfüllt und für unendlich große Werte von $r$ verschwindet. Benutzen wir die Ausdrücke (13) und (13a), so ergibt sich:

a) für $t \to 0$, $r < a$, d. h. für Punkte im Innern des anfangs mit Wirbeln belegten Kreises

$$\lim_{\substack{t \to a \\ r < a}} v \to \frac{\gamma a}{r} e^{-\frac{(a-r)^2}{4\nu t}} \sqrt{\frac{\nu t}{a r \pi}} \cdot \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \to 0\,,$$

b) für $t \to 0$ und $r > a$, d. h. für Punkte außerhalb der Wirbelschicht

$$\lim_{\substack{t \to a \\ r > a}} v = \lim \frac{\gamma a}{r}\left[1 - e^{-\frac{(r-a)^2}{4\nu t}} \sqrt{\frac{\nu t}{a r \pi}} \cdot \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n\right] = \frac{\gamma a}{r}\,,$$

c) für Punkte auf dem Kreise $r = a$ wird dagegen

$$(v)_{r=a} = \frac{\gamma}{2}\left[1 - e^{-\frac{a^2}{2\nu t}} \cdot I_0\left(\frac{a^2}{2\nu t}\right)\right],$$

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ r = a}} v = \frac{\gamma}{2}\,.$$

Weiter ergibt sich, daß für unbegrenzt wachsende Zeit wegen $\lim\limits_{1 \to \infty} U_0 = 1$ die Bewegung der Flüssigkeit verschwindet.

**5. Differentialrelationen und Diskussion der Geschwindigkeitsverteilung.** Zur Erläuterung und Diskussion der für $t \to 0$ sich einstellenden Verteilung der Geschwindigkeit mögen noch einige Rechnungen gegeben werden, die an die Differentialeigenschaften der Funktionen $U_n$ und $V_n$ anknüpfen. Setzt man wieder $\frac{\gamma a}{2\nu t} = z$ und benutzt die Grundformeln

$$\frac{d I_n}{d z} = I_{n-1} - \frac{n}{z} I_n = I_{n+1} + \frac{n}{z} I_n \quad \ldots \ldots \quad (19),$$

so ergibt sich einerseits

$$\frac{\partial U_n}{\partial z} = \sum_{m=n}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^m \left(I_{m+1} + \frac{m}{z} I_m\right) - \sum_{m=n}^{\infty} m \frac{a^m}{r^{m+1}} \frac{d r}{d z} I_m$$

[12]) Vgl. Gray a. Mathews: a. a. O., S. 42.

oder, da sich die beiden letzten Reihen wegen $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\frac{dr}{dz}$ gegenseitig aufheben,

$$\frac{\partial U_n}{\partial z} = \frac{r}{a}\sum_{n+1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^m I_m = \frac{r}{a} U_{n+1},$$

andererseits

$$\frac{\partial U_n}{\partial z} = \sum_{m=n}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^m \left(I_{m-1} - \frac{m}{z} I_m\right) - \sum_{m=n}^{\infty} m \frac{a^m}{r^{m+1}}\frac{dr}{dz} I_m$$

oder

$$\frac{\partial U_n}{\partial z} = \frac{a}{r} U_{n-1} - \frac{2}{z}\overline{U}_n,$$

wenn wir für die neu auftretende Reihe die Bezeichnung

$$\overline{U}_n = \sum_{m=n}^{\infty} m\left(\frac{a}{r}\right)^m \cdot I_m$$

einführen. Ebenso ergeben sich mit der Bezeichnung

$$\overline{V}_n = \sum_{m=n}^{\infty} m\left(\frac{r}{a}\right)^m \cdot I_m$$

die beiden Formeln

$$\frac{\partial V_n}{\partial z} = \frac{a}{r} V_{n+1} + \frac{2}{z}\overline{V}_n, \qquad \frac{\partial V_n}{\partial z} = \frac{r}{a} V_{n-1}.$$

Führen wir statt $z$ wieder $r$ ein, so kommt

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U_n}{\partial r} &= \frac{r}{2\nu t} U_{n+1} \\ \frac{\partial V_n}{\partial r} &= \frac{r}{2\nu t} V_{n-1} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (20); \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\partial U_n}{\partial r} &= \frac{a^2}{2\nu t \cdot r} U_{n-1} - \frac{2}{r}\overline{U}_n \\ \frac{\partial V_n}{\partial r} &= \frac{a^2}{2\nu t \cdot r} V_{n+1} + \frac{2}{r}\overline{V}_n \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (20a).$$

Durch Gleichsetzung der beiden Ausdrücke für die Ableitungen erhalten wir daraus für die Reihen $\overline{U}_n$ und $\overline{V}_n$ die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \overline{U}_n &= \frac{1}{4\nu t}\left(a^2 U_{n-1} - r^2 U_{n+1}\right) \\ \overline{V}_n &= \frac{1}{4\nu t}\left(r^2 V_{n-1} - a^2 V_{n+1}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (21).$$

Mit Hilfe der mitgeteilten Formeln lassen sich jetzt die örtliche und zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit berechnen. Man erhält z. B. mit Benutzung von (13a) bzw. (20)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\gamma a}{2\nu t} e^{-\frac{a^2+r^2}{4\nu t}} \cdot I_0\left(\frac{ra}{2\nu t}\right) - \frac{\gamma a}{r^2} e^{-\frac{a^2+r^2}{4\nu t}} V_1\left(\frac{ra}{2\nu t}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (22).$$

Daraus ergibt sich die Gleichung für die Stelle der größten Geschwindigkeit zu einer bestimmten Zeit in der Form

$$V_1 = I_0 \frac{r^2}{2\nu t}$$

oder mit (14)

$$e^{\frac{r^2+a^2}{4\nu t}} = U_0 + \frac{r^2}{2\nu t} \cdot I_0 .$$

Wenn z. B. $a = 0$ ist, so erhält man für den Kreis größter Geschwindigkeit in der Umgebung eines sich ausbreitenden Wirbelfadens die Gleichung

$$1 + \frac{r^2}{2\nu t} = e^{\frac{r^2}{4\nu t}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (22a),$$

woraus sich dann unmittelbar das oben mitgeteilte Gesetz für die Änderung des Radius herleitet. Man kann zeigen, daß die Gleichungen bzw. nur für $r > a$ erfüllt werden können. Die Geschwindigkeit steigt im Innern des Kreises $|r| = a$ für $t \neq 0$ vom Werte Null in $r = 0$ stetig an und erreicht außerhalb des Kreises ein Maximum in einem Punkt, der um so weiter vom Zentrum entfernt liegt, je größer die Zeit wird, während das Maximum selbst mit wachsender Zeit abnimmt.

Für die Bestimmung der zeitlichen Ableitung für eine gegebene Stelle $r$ benutzen wir die Gl. (19). Man erhält zunächst

$$\frac{\partial U_n}{\partial t} = \sum_{m=n}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^m \left[\frac{m\, I_m(z)}{z} + I_{m+1}(z)\right] \frac{\partial z}{\partial t} = \left(\frac{r}{a}\, U_{n+1} + \frac{1}{z}\, \overline{U}_n\right) \frac{\partial z}{\partial t}$$

oder

$$\frac{\partial U_n}{\partial t} = -\frac{r\,a}{2\,\nu\,t^2} \left|\frac{r}{a}\, U_{n+1} + \frac{2\,\nu\,t}{r\,a}\, \overline{U}_n\right| = -\frac{1}{4\,\nu\,t^2} [r^2\, U_{n+1} + a^2\, U_{n-1}] \quad \ldots \ldots \quad (23),$$

ebenso

$$\frac{\partial V_n}{\partial t} = -\frac{1}{4\,\nu\,t^2} [a^2\, V_{n+1} + r^2\, V_{n-1}] \quad \ldots \ldots \quad (23a).$$

Es wird also z. B.

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} = -\frac{1}{4\,\nu\,t^2} [r\,a\,I_1 + a^2\, U_0 + r^2\, U_1]; \quad \frac{\partial V_1}{\partial t} = -\frac{1}{4\,\nu\,t^2} [a^2\, V_2 + r^2\, V_0]$$

und daher mit Benutzung etwa des Ausdrucks (13a)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\gamma\,a}{r} \cdot \frac{1}{4\,\nu\,t^2} [(r^2 + a^2)\, V_1 - a^2\, V_2 - r^2\, V_0] = \frac{\gamma\,a}{4\,\nu\,t^2} [a\, I_1 - r\, I_0] \quad \ldots \ldots \quad (24).$$

Wir erhalten also als Bedingung für das Maximum

$$\frac{r}{a} = \frac{I_1\left(\dfrac{r\,a}{2\,\nu\,t}\right)}{I_0\left(\dfrac{r\,a}{2\,\nu\,t}\right)} \quad \ldots \ldots \quad (25).$$

Da $I_0$ für alle endlichen Argumente größer ist als $I_1$, so erreicht die Geschwindigkeit nur im Gebiet $r < a$ zu einer bestimmten Zeit ein Maximum. Der gesamte, vom Ort und der Zeit abhängige Geschwindigkeitsverlauf tritt in den Abb. 4 und 5 deutlich hervor, die mit Benutzung

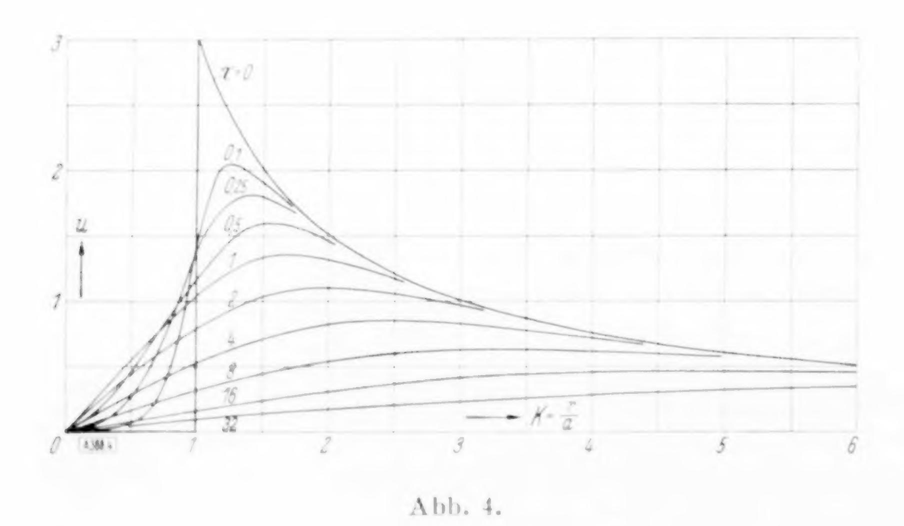


Abb. 4.

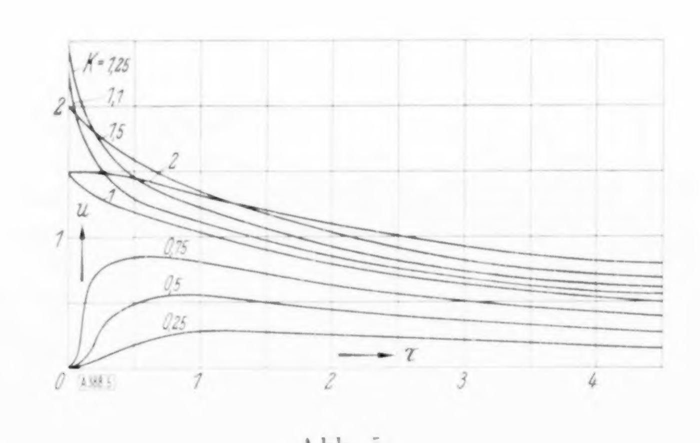


Abb. 5.

der dimensionslosen Größen $\frac{4\,\nu\,t}{a^2} = \tau$, $\frac{r}{a} = \varkappa$ und $u = \frac{3\,v}{\gamma}$ gezeichnet sind, und daher für alle Zähigkeitswerte benutzt werden können. Bei verschiedenen Flüssigkeiten verhalten sich bei festgehaltenem $a$ die einer bestimmten Geschwindigkeit entsprechenden Zeiten umgekehrt wie die Zähigkeitszahlen. Man sieht, daß sich die für konstante Werte von $\tau$ gezeichneten $u$-Kurven nur im Gebiet $r < a$ durchschneiden, während die Schnittpunkte der auf konstantes Verhältnis $\frac{r}{a} = \varkappa$ bezogenen $u$-Kurven im Gebiet $\lambda > 1$, d. h. oberhalb der durch $\lambda = 1$ bestimmten Grenzkurve gelegen sind. Die Geschwindigkeit steigt also in allen Punkten $r < a$ zunächst vom Werte Null bis zu einem Maximum, das um so größer wird, je näher der Punkt dem Kreise liegt, um dann wieder auf Null zu sinken, d. h. sie erreicht denselben Wert zu zwei

verschiedenen Zeiten. Dagegen findet in allen Punkten außerhalb der Wirbelschicht lediglich ein Abfall der Geschwindigkeit von dem der Potentialströmung entsprechenden Wert $\gamma \frac{a}{r}$ bis auf den Wert Null statt.

**6. Einige mit Fall II verwandte Fragestellungen.** Mit Hilfe der vorgetragenen Methode können eine Reihe anderer Strömungen konstruiert werden, insbesondere freie Bewegungen, die allein durch eine gewisse Anfangsverteilung der Wirbelstärke oder der Geschwindigkeit charakterisiert sind. Wenn z. B. ein Zylinder gleichmäßig rotiert, so ist bekanntlich, wie sich sofort aus dem stationären Integral der Gleichung ergibt, die entstehende Geschwindigkeitsverteilung im Innern $v_2 = \omega r$ und im äußeren Gebiet $v_a = \omega \frac{a^2}{r}$. Wenn nun der Zylinder plötzlich aus der Flüssigkeit herausgezogen wird, so findet ein Ausgleich der beiden zunächst getrennten Flüssigkeitsfelder und schließlich eine Aufzehrung der Bewegung durch die Reibung statt. Um die entstehende instationäre Bewegung zu bestimmen, hat man in der Formel für $F(\varrho)$ im Intervall $0 < \varrho < a$ die Verteilungsfunktion $\omega \varrho$ und im Intervall $a < \varrho < \infty$ die Funktion $\omega \frac{a^2}{\varrho}$ einzuführen. Der Gesamtwert von $v$ setzt sich dann aus zwei Teilen zusammen, deren erster mit (13) übereinstimmt, wenn $\gamma = \omega a$ gesetzt wird und deren zweiter die Form hat

$$v_2 = \omega \int_0^\infty d\lambda \int_0^a \lambda \varrho^2 e^{-\lambda^2 \nu t} J_1(\lambda r) J_1(\lambda \varrho)\, d\varrho .$$

Durch Anwendung der Gl. (11) entsteht daraus

$$v_2 = \frac{\omega}{2 \nu t} \int_0^a \varrho^2 e^{-\frac{r^2 + a^2}{4 \nu t}} I_1\left(\frac{r \varrho}{2 \nu t}\right) d\varrho .$$

Wendet man die Rekursionsformel (12) auf das Integral $v_2$ an, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} v_2 &= \omega r \left[1 - e^{-\frac{a^2 + r^2}{4 \nu t}} \cdot V_0\right] - \omega a\, e^{-\frac{a^2 + r^2}{4 \nu t}} \cdot I_1\left(\frac{r a}{2 \nu t}\right) \\ &= \omega r\, e^{-\frac{a^2 + r^2}{4 \nu t}} \cdot U_1 - \omega a\, e^{-\frac{a^2 + r^2}{4 \nu t}} \cdot I_1 \\ &= r \omega\, e^{-\frac{a^2 + r^2}{4 \nu t}} \cdot U_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (27).$$

Addiert man beide Geschwindigkeitswerte, so ergibt sich das zusammengesetzte Feld in der Form

$$v = v_1 + v_2 = \frac{\omega a^2}{r}\left[1 - e^{-\frac{a^2 + r^2}{4 \nu t}} \cdot U_0\right] + r \omega\, e^{-\frac{a^2 + r^2}{4 \nu t}} \cdot U_2 = \omega a\, e^{-\frac{a^2 + r^2}{4 \nu t}} \left[\frac{a}{r} V_1 + \frac{r}{a} U_2\right] \quad . \quad (28).$$

Die weitere Berechnung kann in derselben Weise durchgeführt werden wie in dem Hauptfall.

Größere mathematische Schwierigkeiten bereitet die Behandlung der „erzwungenen" Ausbreitungsvorgänge, z. B. die Bestimmung der Flüssigkeitsbewegung bei der plötzlich einsetzenden gleichförmigen und der nach einem bestimmten Gesetz beschleunigten oder verzögerten Drehung eines Zylinders. Wir werden darauf in einer besonderen Arbeit zurückkommen.

**7. Der achsensymmetrische Fall der linearen Strömung** (Ausbreitung eines kreiszylindrischen Flüssigkeitsstrahles, Fall III). Wenn wir eine kontinuierliche Folge von gleichstarken und gleichdrehenden koaxialen Wirbeln haben, die insgesamt einen unendlich langen Kreiszylinder vom Radius $a$ zusammensetzen, so werden in der umgebenden Flüssigkeit Bewegungen in Richtung der Achse hervorgerufen. Ihrer Erzeugung nach unterscheidet sich diese Bewegung von der des Falles II dadurch, daß die Wirbellinien der kreiszylindrischen Wirbelschicht die orthogonalen Trajektorien sind zu den achsenparallelen Wirbelfäden des vorigen Falles, die Geschwindigkeits- und Wirbelfelder beider Strömungen reziprok aufeinander bezogen sind. Gehen wir von der einfacheren Gleichung für die Geschwindigkeit aus und setzen wir in Analogie mit dem Fall I für den Bewegungssinn eine konstante Geschwindigkeitsverteilung innerhalb des Zylinders voraus, während außerhalb des Zylinders Ruhe sein soll, so haben

wir etwa die Verhältnisse vor uns, wie sie bei einem durch eine kreiszylindrische Düse austretenden freien Strahl realisiert sind. Der Ausdruck für $v$ ist nach Anleitung der Gl. (10) zu bilden, indem wir die Funktionen $J_1$ durch $J_0$ ersetzen. Wenn wir dann in (11) $F(\varrho)=v_0$ setzen, so ergibt sich unmittelbar

$$v=v_0\int_0^\infty \lambda\, d\lambda \int_0^a \varrho\, e^{-\lambda^2 \nu t} J_0(\lambda\varrho) J_0(\lambda r)\, d\varrho \qquad (29).$$

Benutzt man die Formel

$$\int_0^x z J_0(z)\, dz = x J_1(x),$$

so geht der Ausdruck über in

$$v=a v_0\int_0^\infty e^{-\lambda^2 \nu t} J_1(\lambda a) J_0(\lambda r)\, d\lambda \qquad (29a).$$

Andrerseits kann man mit Hilfe der Soninеschen Formel die Integration nach $\lambda$ ausführen und erhält dann

$$v=\frac{v_0}{2\nu t}\int_0^a \varrho\, e^{-\frac{r^2+\varrho^2}{4\nu t}}\cdot I_0\left(\frac{r\varrho}{2\nu t}\right) d\varrho \qquad (29b).$$

Dieses Integral stimmt aber mit dem oben berechneten Integral der Gl. (9) überein, wenn man die Größen $r$ und $a$ miteinander vertauscht. Führt man daher auch im Resultat diese Vertauschung aus oder ersetzt man die Reihe $U$ durch $V$, so resultiert unmittelbar

$$v=v_0\left(1-e^{-\frac{r^2+a^2}{4\nu t}} V_0\right)=v_0\, e^{-\frac{r^2+a^2}{4\nu t}}\cdot U_1 \qquad (30),$$

ein Ausdruck, von dem man leicht nachweisen kann, daß er die geforderten Anfangsbedingungen erfüllt.

Für die Wirbelstärke ergibt sich nach (20)

$$w=-\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{r v_0}{4\nu t} e^{-\frac{a^2+r^2}{4\nu t}}(U_1-U_2)=\frac{a v_0}{4\nu t} e^{-\frac{a^2+r^2}{4\nu t}}\cdot I_1\left(\frac{a r}{2\nu t}\right) \qquad (31).$$

Wenn man die asymptotische Darstellung von $J$ für große Argumente ($t\to 0$) benutzt, so erkennt man, daß $w$ für $t\to 0$ in allen nicht auf dem Kreise $r=a$ liegenden Punkten verschwindet. Die gesamte auf einen Schnitt $z=$ konst bezogene Wirbelmenge wird dagegen

$$M=4\pi\int r w\, dr=\frac{\pi a v_0}{\nu t}\int_0^\infty r\, dr\, e^{-\frac{a^2+r^2}{4\nu t}}\cdot I_1\left(\frac{a r}{2\nu t}\right).$$

Um diesen Ausdruck $t\to 0$ zu bestimmen, kann man $J_1$ durch $J_0$ ersetzen und dann die aus der Theorie der Besselschen Funktionen bekannte Formel

$$\int_0^\infty r\, dr\, e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\cdot I_0\left(\frac{r a}{2\nu t}\right)=2\nu t\, e^{\frac{a^2}{4\nu t}}$$

benutzen. Wir erhalten damit aus dem Ausdruck für $M$

$$\underset{t\to 0}{M}=2\pi a v_0.$$

Es ergibt sich also in der Tat, daß zur Zeit $t\to 0$ die gesamte Wirbelmenge auf dem Zylinderumfang $r=a$ konzentriert ist.

Die weitere Diskussion kann nach Anleitung des vorigen Abschnittes durchgeführt werden. So erhält man z. B. für die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit den mit (24) übereinstimmenden Ausdruck

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{a v_0}{4\nu t^2}(r I_1-a I_0),$$

an den sich dann auch dieselben Folgerungen knüpfen, wie sie oben besprochen wurden. Die für die verschiedenen Zeitwerte $\left(\tau = \frac{4\nu t}{a^2}\right)$ konstruierten Verteilungskurven, die in der Abb. 7

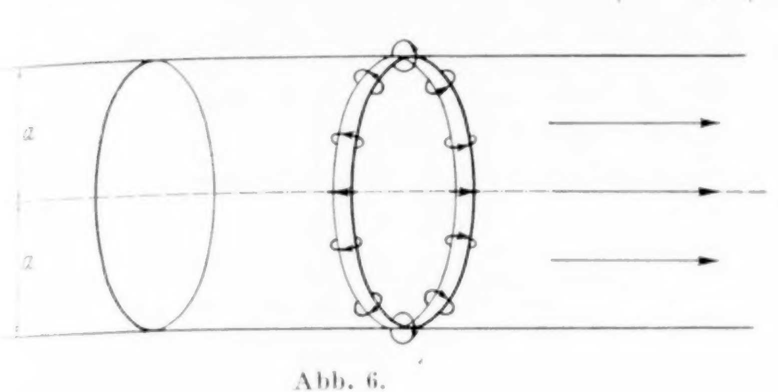


Abb. 6.

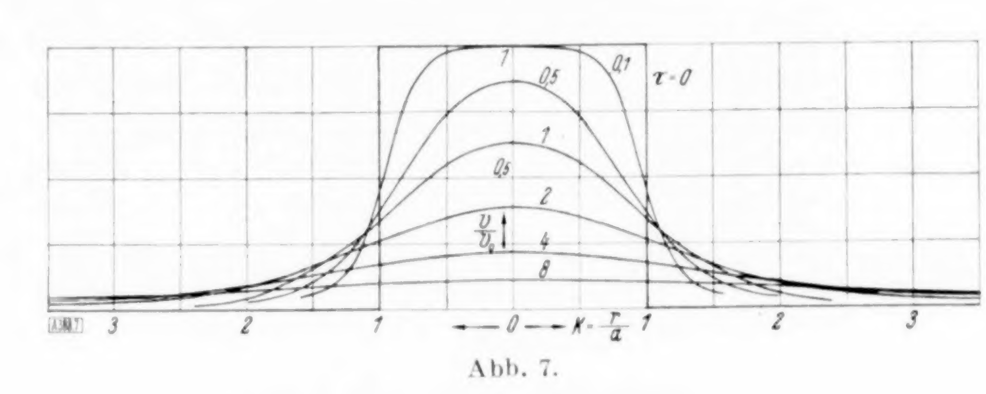



Abb. 7.

bei Verwendung der dimensionslosen Größen $\varkappa = \frac{r}{a}$, $\tau = \frac{4\nu t}{a^2}$ dargestellt sind, haben einen ähnlichen Verlauf wie die entsprechenden Kurven des Falles I. Der in Göttingen durch Messung festgestellte Verlauf der turbulenten Strahlausbreitung unterscheidet sich in ähnlicher Weise von dem vorliegenden laminaren Fall wie die Geschwindigkeitsprofile bei den entsprechenden unter der Wirkung eines konstanten Druckabfalls zustande kommenden stationären Strömungsarten, etwa in einem Kreisrohr. Auch bei der Ausbreitung zeigt sich, daß die Profile der mittleren turbulenten Bewegung in der Nähe des Maximums zunächst flacher ausfallen als die laminaren Profile.

Setzt man $v_0 \cdot \pi a^2 = q$ und läßt $a$ unbegrenzt abnehmen, so gehen (30) und (31) wegen $(U_1)_{a \to 0} \sim \frac{a}{r} I_1 \sim \frac{a^2}{4\nu t}$ über in die Ausdrücke

$$v = \frac{q}{4\pi\nu t} e^{-\frac{a^2}{4\nu t}} \qquad w = \frac{q\, r}{16\pi(\nu t)^2} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}},$$

die dem geradlinigen „Fadenstrahl" entsprechen.

Man kann nun die Behandlung des laminaren kreiszylindrischen Strahles dadurch vervollständigen, daß man auch das Haften an den Wänden des Rohres, das der Strahl verläßt, um in die Flüssigkeit einzutreten, berücksichtigt und eine dem Poiseuilleschen Gesetz entsprechende Anfangsverteilung zugrunde legt, d. h. für die Verteilungsfunktion $F(\varrho)$ den Ansatz macht

$$F(\varrho) = v_0\left(1 - \frac{\varrho^2}{a^2}\right).$$

Die Geschwindigkeit ergibt sich dann dieser Funktion entsprechend als Differenz zweier Ausdrücke, von denen der erste bereits bekannt ist. Der zweite davon zu subtrahierende Ausdruck hat dann nach (10) und (11) die Form

$$v_2 = \frac{v_0}{a^2}\int_0^\infty d\lambda \int_0^a \varrho^3 \lambda\, e^{-\lambda^2 \nu t} J_0(\lambda\varrho)\, J_0(\lambda r)\, d\varrho = \frac{v_0}{2\nu t\cdot a^2}\int_0^a \varrho^3 e^{-\frac{\varrho^2+r^2}{4\nu t}} \cdot I_0\left(\frac{r\varrho}{2\nu t}\right) d\varrho \quad . \quad . \quad (32).$$

Die Umgestaltung des Integrals auf der rechten Seite geschieht in derselben Weise, wie oben gezeigt ist. Man erhält dann durch partielle Integration

$$\frac{1}{2\nu t}\int_0^a \varrho^3 e^{-\frac{\varrho^2+r^2}{4\nu t}} I_0\left(\frac{r\varrho}{2\nu t}\right) d\varrho = -\int_0^a d\left(e^{-\frac{\varrho^2+r^2}{4\nu t}}\right)\varrho^2 I_0\left(\frac{r\varrho}{2\nu t}\right) = -a^2 e^{-\frac{a^2+r^2}{4\nu t}} \cdot I_0\left(\frac{a r}{2\nu t}\right)$$

$$+ 2\int_0^a \varrho\, e^{-\frac{\varrho^2+r^2}{4\nu t}} \cdot I_0\left(\frac{r\varrho}{2\nu t}\right) d\varrho + \frac{r}{2\nu t}\int_0^a \varrho^2 e^{-\frac{\varrho^2+r^2}{4\nu t}} I_1\left(\frac{r\varrho}{2\nu t}\right) d\varrho.$$

Die beiden Integrale auf der rechten Seite sind aber in der bereits unter (12) angegebenen Form enthalten ($n = 0$, bzw. $n = 1$). Benutzt man daher die oben durchgeführte Auswertung, so ergibt sich unmittelbar

$$v_2 = -v_0 e^{-\frac{a^2+r^2}{4\nu t}}\left(I_0 + \frac{r}{a} I_1\right) + v_0 \frac{4\nu t}{a^2}\left(1 + \frac{r^2}{4\nu t}\right) e^{-\frac{a^2+r^2}{4\nu t}} \cdot U_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32a).$$

Wir erhalten daher mit Benutzung von (30) insgesamt

$$v = v_1 - v_2 = v_0\, e^{-\frac{a^2+r^2}{4\nu t}} \left[ U_1 - \frac{r^2}{a^2}\, U_1 + I_0 + \frac{r}{a}\, I_1 - \frac{4\nu t}{a^2}\, U_1 \right]$$

oder

$$v = v_0\, e^{-\frac{a^2+r^2}{4\nu t}} \left[ U_0 - \frac{r^2}{a^2} U_2 - \frac{4\nu t}{a^2}\, U_1 \right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (33).$$

Mit Einführung der oben unter (21) berechneten Reihe $\overline{U}_1$ kann man den Ausdruck schließlich auf die Form bringen

$$v = v_0\, \frac{4\nu t}{a^2}\, e^{-\frac{a^2+r^2}{4\nu t}}\, [\overline{U}_1 - U_1] = v_0\, \frac{4\nu t}{a^2}\, e^{-\frac{a^2+r^2}{4\nu t}} \cdot \sum_{m=2}^{\infty} (m-1) \left(\frac{a}{r}\right)^m \cdot I_m \quad \ldots \quad (33a).$$

Man stellt mit Hilfe der angegebenen Grenzwerte der benutzten Funktionen leicht fest, daß $v$ den Anfangsbedingungen genügt. Da sich nämlich $U_0$ und $U_2$ für $t \to 0$ wie die Exponentialfunktion $e^{\frac{a^2+r^2}{4\nu t}}$ verhalten, so wird in der Tat

$$(v)_{t \to 0} = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right).$$

Für $t \to \infty$ haben wir dagegen mit Benutzung

$$(V_0)_{t \to \infty} \sim 1 + \frac{r^2}{4\nu t}, \quad (U_1)_{t \to \infty} = (U_2)_{t \to \infty} \sim \frac{a^2}{4\nu t}, \quad (U_0)_{t \to \infty} \sim 1 + \frac{a^2}{4\nu t},$$

daher voraussetzungsgemäß

$$(v)_{t \to \infty} = 0.$$

Die Stärke des zu $r$ gehörigen Ringwirbels wird durch eine unmittelbar verständliche Rechnung wie folgt gewonnen

$$w = -\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{r}{4\nu t}\, v_0\, e^{-\frac{a^2+r^2}{4\nu t}} \left[ U_0 - \frac{r^2}{a^2}\, U_2 - \frac{4\nu t}{a^2}\, U_1 \right]$$

$$- \frac{1}{2}\, v_0\, e^{-\frac{a^2+r^2}{4\nu t}} \left[ \frac{r}{2\nu t}\, U_1 - \frac{r}{2\nu t}\,\frac{r^2}{a^2}\, U_3 - \frac{2r}{a^2}\, U_2 - \frac{4\nu t}{a^2}\,\frac{r}{2\nu t}\, U_2 \right]$$

$$= \frac{v_0\, r}{4\nu t}\, e^{-\frac{a^2+r^2}{4\nu t}} \left[ I_0 - I_2 + \frac{4\nu t}{a^2} \left( U_2 - \frac{a}{r}\, I_1 \right) \right].$$

Mit Benutzung der aus (19) resultierenden Beziehung $\frac{2 I_1}{z} = I_0 - I_2$ geht der Ausdruck über in

$$w = \frac{v_0\, r}{a^2}\, e^{-\frac{a^2+r^2}{4\nu t}} \cdot U_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (34).$$

Auf die graphische Darstellung der $v$-Kurven für konstante Werte von $\tau = \frac{4\nu t}{a^2}$ und $k = \frac{r}{a}$ haben wir verzichtet. Die Diskussion, insbesondere die Bestimmung der Maxima der Geschwindigkeit in einem Punkt $r > a$ ist an Hand der gegebenen Formeln leicht durchzuführen.

Mit dieser Zusammenstellung der einfachsten eindimensionalen Ausbreitungsfälle dürfte zunächst die Methode genügend klar hervorgetreten sein, mit deren Hilfe viele weitere und kompliziertere Fälle behandelt werden können. Für die Durchrechnung anderer Bewegungsarten, die nicht nur durch die Anfangsverteilung des Geschwindigkeits- bzw. Wirbelfeldes, sondern auch durch besondere Randbedingungen für die festen oder beweglichen Grenzen der Flüssigkeit gekennzeichnet sind, müßte erst eine gewisse Erweiterung vorgenommen werden, die den Gegenstand einer besonderen Arbeit bilden soll. Zu den Ausbreitungserscheinungen dieser Art gehört noch die Bewegung einer zähen unbegrenzten Flüssigkeit, in der sich ein Kreiszylinder mit einer veränderlichen Geschwindigkeit dreht oder in axialer Richtung fortbewegt. Besonderes Interesse mathematischer Natur bietet der Ausbreitungsvorgang, der von einer plötzlich einsetzenden und konstant bleibenden Bewegung hervorgerufen wird. 388

# Beitrag zur thermodynamischen Berechnung der Schornsteine.

Von *Mario Medici* in Padua.

Es wird ein rechnerisches Verfahren zur Ermittelung der Schornsteinhöhe $H$ und der Querschnittflächen $F_u$ (unten) und $F_o$ (oben) angegeben, welches die Bemessung des Schornsteines mit „natürlichem Zuge" in enge Beziehung mit derjenigen der ihm angeschlossenen Verbrennungsapparate und Rauchgaskanäle bringt. Das abgeleitete Verfahren, das keinen Gebrauch von empirischen Formeln macht, beruht auf gesunden Grundlagen der Strömungs- und Wärmelehre und gewährt dadurch einen viel besseren Einblick in die eigentlichen Zugverhältnisse als die bekannten Verfahren. Dabei folgt die Schornsteinbemessung und diejenige der Rauchgaswege aus den Bedingungen der besten Ausnutzung des eigenen natürlichen „Auftriebes" der Rauchgase.

Der Schornstein und die ihm angeschlossenen Rauchgaskanäle (bzw. Rauchgaswege bei dem Kessel) müssen die Rauchgase einer gegebenen Brennstoffmenge, die im Verbrennungsraum (Kesselfeuerung, Schmelzofen usw., je nach der Art der Wärmeanlage) verbrannt wird, auch bei den ungünstigsten Wetterzuständen des betreffenden Ortes, abzuführen vermögen.

Der notwendige Zug kann natürlich, d. h. durch den Auftrieb der heißen Rauchgase erfolgen oder künstlich durch eine angebrachte Saugzuganlage bewirkt werden. Im ersten Fall muß der Schornstein (Schornstein mit „natürlichem Zuge") so bemessen werden, daß auch bei ungünstigem Wetter, d. h. bei dem niedrigstmöglichen Barometerstand des betreffenden Ortes und bei großem Luftfeuchtigkeitsgehalt, die erwähnte Abführung der Rauchgase ohne Schwierigkeit erfolgen kann. Gewöhnlich wird sogar der Fabrikschornstein so dimensioniert, daß immer eine gewisse Zugreserve vorhanden ist.

Die Hauptabmessungen eines Schornsteines sind: die Schornsteinhöhe $H\,(m)$ und die Querschnittfläche $F_u\,(m^2)$ am Fuße und $F_o\,(m^2)$ an der Schornsteinmündung bzw. die entsprechenden Durchmesser $D_u\,(m)$ und $D_o\,(m)$.

Dabei stehen die Höhe $H$ und die Durchmesser $D_u$ und $D_o$ und das Verhältnis $\frac{D_o}{D_u}$ in einem gewissen Zusammenhang, der aus der Erfüllung der Energiegleichung längs des Schornsteines hervorgeht.

Der erwähnte Zusammenhang ist aber mit der Vorstellung verknüpft, daß die Dimensionierung der angeschlossenen Rauchgaskanäle bzw. -wege bis zu dem Verbrennungsraum zurück in der Weise geschieht, daß die sich ergebende Querschnittsfolge eine ununterbrochene, gleichmäßige Konizität nach der Schornsteinmündung aufweist. Dabei ist ferner anzunehmen, daß die Regelung des Zugbedarfes nicht durch einen gewöhnlichen Rauchgasschieber, sondern durch einen vor der Feuerung eingebauten Schieber geschieht, der die Luftzufuhr regelt. In bezug auf diese Vorstellung möchte ich auf einen sehr wichtigen Punkt gleich aufmerksam machen.

Es wird in der Literatur von mancher Seite[1]) behauptet, daß der Unterdruck am Schornsteinfuß am größten ist und daß er nach der Mündung wie nach der Feuerung zu abnimmt. Dieser Höchstwert wird sogar als „Schornsteinzug" angegeben.

Dabei verwechselt man eigentlich zwei, m. E. nach, ganz verschiedene Begriffe, nämlich die Druckunterschiede zwischen Feuerraum und Schornsteineintrittsquerschnitt $F_u$ (die wir mit $|\Delta P|_u^F$ bezeichnen wollen) mit dem Druckunterschiede zwischen irgendwelchen Punkten des Schornsteineintrittsquerschnittes $F_u$ und den Außenluftdruck zu demselben Niveau. Den letztgenannten Druckunterschied wollen wir im folgenden mit $|\Delta P|_u^a$ bezeichnen. Im allgemeinen weisen die beiden erwähnten mittleren Druckunterschiede nicht denselben Wert auf. Dabei spielt eine wichtige Rolle die übliche Vernachlässigung der ansehnlichen Verminderung des Außenluftdruckes mit zunehmender Höhe. Sie ist von einer Größenordnung von etwa mehr als 1 mm WS je m Schornsteinhöhe, was manchmal dem 1,8- bis 2fachen des Zugbedarfes der Anlage entspricht.

Sein Wert läßt sich durch folgende Gleichung:

$$P_{\mathrm{at}\cdot H} = P_{\mathrm{at}\cdot o}\left(1 - \frac{3{,}28033}{33000}\,H\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

berechnen, die von der entsprechenden Formel[2]) des englischen „National Advisory Committee for Aeronautics" abgeleitet worden ist. Darin bezeichnet $P_{\mathrm{at}\cdot H}$ den Luftdruck (in kg/m² oder mm WS ausgedrückt) in Höhe $H$ über dem Meeresspiegel und $P_{\mathrm{at}\cdot o}$ den Luftdruck in Höhe des Meeresspiegels.

[1]) Vgl. u. a. D. Göhlke: „Der Fabrikschornstein", Die Wärme, 30—7, 1932, Nr. 31.
[2]) Vgl. Report, Nr. 376, London 1931.

Der mittlere Druckunterschied $|\Delta P|_u^F = P_{at \cdot F} - P_u$ (worin mit $P_{at \cdot F}$ der Luftdruck bei der Regelklappe vor der Feuerung und mit $P_u$ der mittlere absolute Druck im Eintrittsquerschnitt des Schornsteines bezeichnet wird) in mm WS oder kg/m² stellt den „Zugbedarf" vom Feuerraum bis zum Schornstein dar, und er ist nur von der Summe der verschiedenen Zugverluste vom Eintritt der Verbrennungsluft in die Regelklappe bis zum Schornsteinfuß abhängig.

Die Zugverluste vom Eintritt der Verbrennungsluft in die Regelklappe vor der Feuerung bis zum Kesselende lassen sich mit guter Annäherung nach einem von Münzinger angegebenen Verfahren[3]) ermitteln. Der Verlust im Fuchs läßt sich je nach Bauart und Leistung der Wärmeanlage leicht abschätzen; bei normalen Verhältnissen wird er allerdings kaum 1 bis 2 mm WS betragen.

Die Rauchgastemperatur am Schornsteinfuß ist ebenfalls festgelegt. Bei neueren Dampfkesselanlagen mit Ekonomiser und Luftvorwärmer schwankt sie zwischen 130° C und 200° C, je nach der Belastung und je nach der Bauart.

Bei neueren Kesselbauarten sind meistens Feuerraum, Kesselzüge, Ekonomiser und Luftvorwärmer tunnelartig übereinandergesetzt, und oft sitzt der Schornstein gerade auf dem Kesseldach (Abb. 1 links).

Je nach der Bauart und der Aufstellungsweise des Schornsteines (siehe Abb. 1, wo zwei extremale Aufstellungsarten des Schornsteines dargestellt sind) ist der Druck $P_u$ mehr oder weniger kleiner als der Außenluftdruck auf dem Niveau des Eintrittsquerschnittes des Schornsteines (dieser letzte Druck ist z. B. gleich $P_{at \cdot Hu}$ in Abb. 1 links, während $P_{at \cdot Boden}$ dem Druck in Abb. 1 rechts gleich ist). Darauf geben allerdings die vorgenommenen üblichen Zugmessungen genügenden Hinweis.

Abb. 1 und 2.

Der gemessene oder berechnete mittlere Druckunterschied:

$$|\Delta P|_u^a = P_{at \cdot Hu} - P_u \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

steht daher in keinem Zusammenhang mit dem „Zugbedarf"

$$|\Delta P|_u^F = P_{at \cdot F} - P_u \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

der Wärmeanlage, und es ist absolut sinnlos, auf den Druckunterschied $|\Delta P|_u^a$ für die Beurteilung des Verhaltens eines Schornsteines mit „natürlichem Zuge" Bezug zu nehmen. Der Druckunterschied, der überhaupt dabei in Frage kommt, ist folgender:

$$|\Delta P|_o^u = P_u - P_o \text{ in mm WS oder kg/m}^2 \quad (4),$$

worin $P_o$ den mittleren Druck der Rauchgase an der Schornsteinmündung $F_o$ (Abb. 1) bezeichnet. Hierzu ist zu bemerken, daß Wind, in geneigter Richtung auf den Schornsteinkopf blasend, mitsaugen helfen kann und umgekehrt, in ungünstiger Weise blasend den Schornsteinzug verringern kann.

Für die Berechnung können dieser Einfluß und derjenige eventueller Sonnenbestrahlung nicht berücksichtigt werden; man muß vielmehr windstilles Wetter voraussetzen und als Wert des Druckes $P_o$ denjenigen annehmen, der dem Außenluftdruck in der Höhe der Schornsteinmündung entspricht. Sei $H_o$ diese Höhe über dem Fabrikboden (Abb. 1).

Im allgemeinen ist der Druck $P_u$ der Rauchgase im Eintrittsquerschnit $F_u$ des Schornsteines größer als der Druck $P_o$ an der Schornsteinmündung. Demzufolge muß zu den Strömungsverhältnissen der Rauchgase längs eines Schornsteines „mit natürlichem Zuge" ein gewisses Ähnlichkeitsverhalten mit denjenigen längs einer langen Düse anerkannt werden. Dabei soll man sich den „Zugbedarf", der dem Schornstein angeschlossenen Verbrennungsapparate und Rauchgaskanäle als eine „Förderhöhe" vorstellen, deren Betrag in m Rauchgassäule ausgedrückt gleich $\frac{|\Delta P|_u^F}{\gamma_R}$ ist. Bei der Festlegung des Wertes von $|\Delta P|_u^F$ ist natürlich immer dem Rechnung zu tragen, daß im Feuerraum ein Auftrieb der Verbrennungsgase vorhanden ist, und daß in den Kesselzügen, in denen die Rauchgase aufwärts strömen, ebenfalls Auftrieb vorhanden ist, während in allen abfallenden Kesselzügen bzw. Rauchgaswegen Abtriebe auftreten, die den „Zug" gewissermaßen hemmen.

[3]) Vgl. F. Münzinger: AEG.-Mitteilungen 1930, S. 152.

Bei der erwähnten turmartigen Aufstellung von Feuerraum, Kessel und Schornstein (Abb. 1 links) ist der gesamte Auftrieb von erheblicher Größenordnung; daher kommt man mit bedeutend geringeren Schornsteinhöhen aus. Am günstigsten liegen die Verhältnisse bei neueren Kesselbauarten mit Zwangumlauf (Umlaufkesseln), weil dadurch der Kessel von seiner bisherigen Raumbindung befreit wird und strömungstechnisch viel besser durchgebildet werden kann, was große Vorteile im Zugbedarf und in der Wärmeleistung bringt. Während die höchste zulässige Rauchgasgeschwindigkeit im Feuerraum rund 5 m/sec beträgt, läßt man in den Vorwärmern mit Bezug auf den Wärmeübergang die erwähnte Geschwindigkeit manchmal bis 14 m/sec zunehmen[4], da aus rein strömungstechnischen Betrachtungen eine fortwährende gleichmäßige Zunahme der Rauchgasgeschwindigkeit sehr erstrebenswert ist. Bei einer ununterbrochenen gleichmäßigen Konizität des Abführungssystemes der Rauchgase (Verbrennungsapparat + Rauchgaskanäle bzw. — Wege + Schornstein) wird die Reibungs- oder Widerstandsziffer (als diejenige einer beschleunigten Strömung) wesentlich herabgesetzt und die sonst vorkommende Wirbelbildung an manchen Stellen der Rauchgaswege absolut vermieden. Abfallende Kesselzüge bzw. Rauchgaswege, die Abtriebe hervorrufen, sind überhaupt zu vermeiden.

In der Wärmetechnik sind die Vorgänge immer verwickelter als in der gewöhnlichen Strömungslehre, weil hier zu den rein strömungstechnischen Vorgängen noch der Einfluß der Temperaturänderungen hinzukommt. In dieser Beziehung möchte ich auf eine sehr wichtige Tatsache gleich aufmerksam machen.

Was die Temperatur der Rauchgase im Schornstein betrifft, ist man meist nur auf Schätzungen angewiesen. Gegenüber der Temperatur am Schornsteinfuße ist die Temperatur an der Schornsteinmündung etwas geringer, da sich die Rauchgase im Schornstein etwas abkühlen. Die Rauchgasabkühlung ist um so geringer, je größer der mittlere Schornsteindurchmesser $D_m = \frac{D_u + D_o}{2}$ und je größer die Rauchgasgeschwindigkeit $w_m = \frac{w_u + w_o}{2}$ ist. Ihre Größenordnung ist aber eine viel kleinere, als meist in der Literatur angegeben wird. Nach einer von Poßner[5]) angegebenen Formel, worin eine Wärmedurchgangszahl gleich 1 bis 2 je nach der Mauerstärke angenommen wird, schwankt die Rauchgasabkühlung längs des Schornsteines zwischen 0,25 und 0,75 °C je m Schornsteinhöhe (Einheitsabkühlung). Nach Untersuchungen des Verfassers für gemauerte, spitz zulaufende Schornsteine ist die Einheitsabkühlung der Rauchgase bei nicht zu kleinen Werten für $D_m$ und $w_m$ ($w_m > 10$ m/sec) eine viel geringere, und zwar ist sie meist wesentlich kleiner als 0,1 °C. Dieses Ergebnis scheint allerdings wohl im Einklang zu stehen mit der von der „Vereinigung der Großkesselbesitzer" neuerlich[6]) bekanntgegebenen Erfahrungstatsache, daß bei „hohen gemauerten Schornsteinen mit großem lichten Durchmesser die Temperaturabnahme der Rauchgase mit etwa $^1/_{10}$ °C je m Kaminhöhe bei normaler Belastung des Kamins anzunehmen ist".

Den Reibungsverlusten längs des Schornsteines ist ebenfalls eine gewisse „Förderhöhe" zuzuschreiben, die in m Rauchgassäule ausgedrückt gleich $(H_o - H_u)\,\lambda\,\frac{w_m^2}{2\,g\,D_m}$ ist (Abb. 1). Darin bezeichnet man mit $\lambda$ die Widerstandsziffer, mit $w_m$ die mittlere Rauchgasgeschwindigkeit im Schornstein und mit $D_m$ den mittleren Durchmesser des Schornsteines.

Bei der Bemessung von Fabrikschornsteinen mit „natürlichem Zuge" sind die eben klargelegten Umstände besonders zu beachten, wenn man nach einer Abführung der Rauchgase streben will, die durch die geringstmöglichen Herstellungskosten für den Schornstein und die angeschlossenen Kanäle gekennzeichnet sein muß. Infolge der Nichtberücksichtigung dieser Tatsachen werden die Schornsteinhauptabmessungen oft nur unter mangelhafter Beachtung der eigentlichen Strömungsverhältnisse ermittelt.

Eine empirische, unzweckmäßige Dimensionierung des Schornsteines ist insofern von großem Nachteil, als sie einen ausschlaggebenden ungünstigen Einfluß auf die Wirtschaftlichkeit der Wärmeanlage auszuüben vermag.

Vermeidung jedes unnötigen Zugbedarfes und guter Zug mit den geringstmöglichen Abmessungen des Fabrikschornsteines sind wiederum die Elemente, wovon die Wirtschaftlichkeit der Wärmeanlage abhängig ist.

Im Beharrungszustand gleicht das Hindurchziehen der Rauchgase durch ein nach der Schornsteinmündung spitz zulaufendes Abführungssystem der stationären Bewegung eines strömenden Gases in einer sich allmählich verengenden Rohrleitung, die dabei Temperaturänderungen ausgesetzt ist, die ganz verschieden ausfallen, je nach der betreffenden Strecke der Rauchgaswege.

[4]) F. Münzinger: „Berechnung und Verhalten von Wasserrohrkesseln", J. Springer, Berlin 1929, S. 110.
[5]) Vgl. L. Poßner: „Die Wärme", Jahrgang 50, S. 883.
[6]) Vgl. „Kesselbetrieb" der Vereinigung der Großkesselbesitzer, II. Aufl., Berlin 1931, S. 82, Abschnitt: „Schornsteine", Nr. 225.

Die beschleunigte Strömung der Rauchgase durch die Kesselzüge, Rauchgaskanäle und durch den Schornstein, welche beim Anlaufen durch den natürlichen Auftrieb der Verbrennungsgase eingeleitet wird, d. h. infolge des Unterschiedes vom spezifischen Gewicht zwischen Rauchgase und Außenluft, wird, im eingetretenen Beharrungszustand, von dem zwischen Anfang und Ende der Rohrleitung herrschenden Druckunterschied $P_{at \cdot F} - P_0$ (Abb. 1) aufrechterhalten. Da im Schornstein die ebenerwähnten Temperaturänderungen von einer sehr geringen Größenordnung sind, ist es angebracht, sich bei der Untersuchung der eigentlichen Strömungsverhältnisse im stationären Beharrungszustand auf den Schornsteingasweg allein zu beschränken. Man denke sich aus dem gesamten Rauchgasstrom einen unendlich dünnen Stromfaden herausgeschnitten.

Die Energiegleichung lautet:

$$A \frac{w \cdot d\,w}{g} = -\left[d\,i + A\,d\left(\frac{P_u - P_0}{\gamma_R} - \frac{w_u^2}{2\,g}\right) + d\,(Q_{W\,I} - Q_{R\,I})\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Darin bezeichnet man mit $i$ den Wärmeinhalt der Rauchgase im Schornstein, mit $Q_{W\,I}$ die durch Wärmeübergang abgeführte spezifische Wärmemenge und mit $Q_{R\,I}$ die durch Wandreibung erzeugte Wärmemenge.

Im Zeitteil $d\,z$ geht durch das Element $d\,F_u$ des Eintrittsquerschnittes des Schornsteines das Rauchgasgewicht

$$d\,G = d\,F_u \cdot w_u \cdot \gamma_R \cdot d\,z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

hindurch und führt die Energie:

$$\left(u + A\,\frac{w_u^2}{2\,g}\right) d\,G \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

mit.

In Gl. (6) bezeichnet $\gamma_R$ das mittlere spezifische Gewicht der Rauchgase am Schornsteinfuß, und $w_u$ die mittlere Rauchgasgeschwindigkeit im Eintrittsquerschnitt des Schornsteines. Bei Dampfkesselanlagen ist die Rauchgeschwindigkeit $w_u$ meist in ziemlich engen Grenzen vorgeschrieben, und zwar durch die Bedingung der Auswahl einer wirtschaftlichen Rauchgasgeschwindigkeit längs des Vorwärmers [7]). Bei anderen Wärmeanlagen hat man ebenfalls nicht immer freie Auswahl von $w_u$.

$\gamma_R$ ist abhängig von der Zusammensetzung der Rauchgase (insbesondere von dem Wasserdampfgehalt und zum Teil auch vom $CO_2$-Gehalt) und von der Abkühlung derselben längs des Abführungssystems. In Zahlentafel 1 sind für den Temperaturbereich $-5^{\circ}$ C bis $+30^{\circ}$ C die Werte des spezifischen Gewichts der atmosphärischen Luft bei einem mittleren Feuchtigkeitsgehalt angegeben. Der Barometerstand, der in Höhe des Meeresspiegels 760 mm QS im Mittel beträgt, schwankt infolge meteorologischer Einflüsse für mittlere geographische Breiten zwischen etwa 720 und 800 mm WS, also um etwa $\pm 5$ vH. In Zahlentafel 2 sind die Werte des spezifischen Gewichts $/\gamma_R/^{W\,d=0}_{760}$ der Rauchgase, bei einem Barometerstand von 760 mm QS, bei mittlerem $CO_2$-Gehalt (9 bis 12 vH) und bei einem Wasserdampfgehalt gleich Null (d. h. für trockene Gase) angegeben.

Zahlentafel 1.

Spezifisches Gewicht mittelfeuchter Luft.

| $B$ | $t_L = -5^{\circ}$ C | $0^{\circ}$ C | $5^{\circ}$ C | $10^{\circ}$ C | $15^{\circ}$ C | $20^{\circ}$ C | $25^{\circ}$ C | $30^{\circ}$ C |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 800 | 1,385 | 1,355 | 1,332 | 1,310 | 1,29 | 1,261 | 1,24 | 1,221 |
| 790 | 1,370 | 1,338 | 1,316 | 1,291 | 1,27 | 1,247 | 1,227 | 1,208 |
| 780 | 1,350 | 1,320 | 1,300 | 1,28 | 1,254 | 1,23 | 1,21 | 1,11 |
| 770 | 1,331 | 1,302 | 1,285 | 1,26 | 1,24 | 1,217 | 1,195 | 1,178 |
| 760 | 1,314 | 1,288 | 1,266 | 1,243 | 1,221 | 1,20 | 1,18 | 1,161 |
| 750 | 1,293 | 1,273 | 1,250 | 1,228 | 1,206 | 1,185 | 1,167 | 1,147 |
| 740 | 1,278 | 1,252 | 1,232 | 1,211 | 1,190 | 1,17 | 1,149 | 1,13 |
| 730 | 1,260 | 1,239 | 1,216 | 1,194 | 1,172 | 1,152 | 1,132 | 1,118 |
| 720 | 1,242 | 1,220 | 1,199 | 1,178 | 1,158 | 1,138 | 1,119 | 1,1 |
| 710 | 1,228 | 1,205 | 1,182 | 1,160 | 1,141 | 1,121 | 1,106 | 1,083 |
| 700 | 1,211 | 1,188 | 1,166 | 1,146 | 1,127 | 1,106 | 1,088 | 1,07 |

[7]) Vgl. F. Münzinger: „Berechnung und Verhalten von Wasserrohrkesseln“, S. 110 u. f.

Zahlentafel 2.
Spezifisches Gewicht trockener Rauchgase von mittleren $CO_2$-Gehalt.

| $B$ | $t_R = 0\,^\circ C$ | $50\,^\circ C$ | $100\,^\circ C$ | $150\,^\circ C$ | $200\,^\circ C$ | $250\,^\circ C$ | $300\,^\circ C$ | $350\,^\circ C$ | $400\,^\circ C$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 800 | 1,392 | 1,18 | 1,025 | 0,9 | 0,806 | 0,732 | 0,666 | 0,614 | 0,569 |
| 790 | 1,378 | 1,164 | 1,012 | 0,89 | 0,795 | 0,722 | 0,658 | 0,606 | 0,562 |
| 780 | 1,36 | 1,15 | 1 | 0,878 | 0,785 | 0,7125 | 0,65 | 0,598 | 0,554 |
| 770 | 1,342 | 1,135 | 0,988 | 0,866 | 0,775 | 0,704 | 0,642 | 0,59 | 0,547 |
| 760 | 1,325 | 1,12 | 0,975 | 0,855 | 0,765 | 0,695 | 0,633 | 0,582 | 0,54 |
| 750 | 1,308 | 1,104 | 0,962 | 0,843 | 0,755 | 0,686 | 0,625 | 0,575 | 0,532 |
| 740 | 1,29 | 1,09 | 0,95 | 0,832 | 0,745 | 0,676 | 0,616 | 0,568 | 0,525 |
| 730 | 1,272 | 1,078 | 0,938 | 0,821 | 0,735 | 0,667 | 0,607 | 0,56 | 0,518 |
| 720 | 1,252 | 1,06 | 0,925 | 0,81 | 0,725 | 0,658 | 0,599 | 0,552 | 0,511 |
| 710 | 1,24 | 1,046 | 0,91 | 0,8 | 0,715 | 0,649 | 0,591 | 0,544 | 0,504 |
| 700 | 1,22 | 1,03 | 0,9 | 0,788 | 0,705 | 0,64 | 0,583 | 0,536 | 0,497 |

Die angegebenen Werte von $\gamma_R$ sind je nach dem Wasserdampfgehalt (bei Braunkohlen) und je nach dem $CO_2$-Gehalt eventuell zu korrigieren. Für die Herabsetzung von $\gamma_R$ spielt der Wasserdampfgehalt bzw. der Feuchtigkeitsgehalt der zur Verbrennung gelangenden Kohle eine ansehnliche Rolle. Für deutsche Braunkohle ist im Mittel $/ \gamma_R /_0^{760} = 1{,}27$ kg/m³ bei mittlerem $CO_2$-Gehalt (9 bis 12 vH). Zwischen den Querschnitten $F_u$ und $F_o$ des Schornsteines werde dem Rauchgasstrom in der Zeiteinheit die Wärmemenge $Q_R$ durch Wandreibung mitgeteilt:

$$Q_R = A\,L_R = A \cdot G_R \cdot (H_o - H_u) \cdot \frac{\lambda\, w_m^2}{2\,g \cdot D_m} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (8),$$

dagegen die Wärmemenge $Q_w$ durch Wärmeübergang von den Rauchgasen nach der Außenluft durch die Schornsteinmauerwände abgeführt:

$$Q_w = \alpha \cdot S\,(t_m - t_L) = \alpha \cdot S \left| \left( \frac{t_u + t_o}{2} \right) - t_L \right| \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (9).$$

In den Gl. (8) und (9) bezeichnet man mit:

$G_R =$ die gesamte Rauchgasmenge in kg/sec,
$S =$ die Mantelfläche des Schornsteines in m²,
$t_m =$ die mittlere Temperatur der Rauchgase im Schornstein $= \dfrac{t_u + t_o}{2}$,
$t_L =$ die mittlere Temperatur der Außenluft,
$\alpha =$ die gesamte Wärmedurchgangszahl.

Da $Q_w$ etwas größer als $Q_R$ ist, tritt längs des Schornsteines eine geringe Abkühlung der Rauchgase auf. Diese Abkühlung ist von einer Größenordnung, die selten den Betrag von 0,1° C je m Schornsteinhöhe überschreitet; meist ist sie wesentlich kleiner. — Die Zustandsänderung der Rauchgase längs des Schornsteines ist eigentlich eine Polytrope, deren Exponent $m$ etwas größer als der Exponent $K$ der Adiabate ist, weil die Zustandsänderung mit einer geringen Wärmeabfuhr erfolgt.

Da die in Frage kommenden Druckunterschiede und Temperaturintervalle sehr klein sind, hat die Polytrope einen logarithmischen Verlauf im $T$-$S$-Diagramm; dieses Diagramm wird dann identisch mit dem $i$-$S$-Diagramm.

Die Wärmegleichung für die Polytrope lautet:

$$/ Q_I /_{\text{Polytr.}} = / c^m /_{t_o}^{t_u} \cdot (T_u - T_o) = \frac{\left\{ / c_v^m /_{t_o}^{t_u} \cdot m - / c_p^m /_{t_o}^{t_u} \right\}}{m - 1} (T_u - T_o) \quad . \; . \; . \; . \qquad (10).$$

Darin bezeichnet man mit:

$/ c_p^m /_{t_o}^{t_u} =$ die spezifische Wärme der Rauchgase beim konstanten Druck im Temperaturbereich $t_u - t_o$,
$/ c_v /_{t_o}^{t_u} =$ die spezifische Wärme der Rauchgase beim konstanten Volumen im Temperaturbereich $t_u - t_o$.

In Zahlentafel III sind z. B. nach G. Herberg[8]) die mittleren Werte von $c_p$ bezogen auf 1 kg Gas bzw. auf 1 Nm³ Gas (1 Nm³ = 1 m³ zu 0° C und 760 mm QS) im Temperaturbereich 0° bis 300° C bzw. 200° C bis 300° C angegeben.

[8]) Vgl. G. Herberg: „Handbuch der Feuerungstechnik und des Dampfkesselbetriebes", Berlin 1928, J. Springer.

Zahlentafel 3.

| Gas | $R$ | $\lvert c_p{}^m \rvert_{0^0\,C}^{300^0\,C}$ bezogen auf | | $\lvert c_p{}^m \rvert_{200^0\,C}^{300^0\,C}$ bezogen auf | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 kg Gas | 1 Nm³ Gas | 1 kg Gas | 1 Nm³ Gas |
| $H_2O$ | 420 | 0,524 | 0,4216 | 0,543 | 0,437 |
| $CO_2$ | 19,25 | 0,221 | 0,434 | 0,234 | 0,460 |
| $O_2$ | 26,5 | 0,218 | 0,312 | 0,223 | 0,318 |
| $N_2$ | 30,2 | 0,250 | 0,312 | 0,255 | 0,318 |
| $CO$ | 30 | 0,250 | 0,312 | 0,255 | 0,318 |

Bezeichnet man mit $G_{R\,l}$ das Gewicht eines kg Rauchgases und mit $G_{CO_2}$, $G_{CO}$, $G_{N_2}$, $G_{O_2}$, $G_{H_2O}$, $G_{SO_2}$ . . . . . die partiellen Gewichte der in 1 kg Rauchgas enthaltenen $CO_2$, $CO$, $N_2$, $O_2$, $H_2O$, $SO_2$ . . . . ., dann ist:

$$\left.\begin{array}{l} \lvert c_p{}^m \rvert_{t_o}^{t_u} = \dfrac{1}{\lvert G_{R\,l} \rvert_{t\,m}^{760}} \{ G_{CO_2} \cdot \lvert c^m_{pCO_2} \rvert_{t_o}^{t_u} + G_{CO} \cdot \lvert c^m_{pCO} \rvert_{t_o}^{t_u} + C_{N_2} \\ \cdot \lvert c^m_{pN_2} \rvert_{t_o}^{t_u} + G_{O_2} \cdot \lvert c^m_{pO_2} \rvert_{t_o}^{t_u} + G_{H_2O} \cdot \lvert c^m_{pH_2O} \rvert_{t_o}^{t_u} + \ldots\ldots \} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11),$$

während

$$\lvert c_v{}^m \rvert_{t_o}^{t_u} = \lvert c_p{}^m \rvert_{t_o}^{t_u} - A\,R \quad \ldots \quad (12) \qquad \text{und:} \qquad \lvert K \rvert_{t_o}^{t_u} = \frac{\lvert c_p{}^m \rvert_{t_o}^{t_u}}{\lvert c_v{}^m \rvert_{t_o}^{t_u}} \quad \ldots \quad (13).$$

Gl. (10) kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\lvert Q_I \rvert_{\text{Polytr.}} = \frac{\lvert c_v{}^m \rvert_{t_o}^{t_u} \cdot m - \lvert c_p{}^m \rvert_{t_o}^{t_u}}{m-1} \cdot T_u \left[ 1 - \left( \frac{P_o}{P_u} \right)^{\frac{m-1}{m}} \right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14),$$

weil:

$$T_o = T_u \left( \frac{P_o}{P_u} \right)^{\frac{m-1}{m}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15),$$

woraus:

$$P_o = \left[ P_{\text{Boden}} - (\text{Zugbedarf}) \frac{F\,r}{F\,u} \right] \left( \frac{T_o}{T_u} \right)^{\frac{m}{m-1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16).$$

Für $P_o$ gilt auch:

$$P_o = P_{\text{Boden}} - (\text{Höchster wirks. Zug}) \frac{F\,r}{F\,u} - \Delta P_S - \gamma_R \frac{w_o{}^2}{2g} \quad \ldots\ldots \quad (17).$$

Darin bezeichnet man mit $\Delta P_S$ den durch die Schornsteinreibungsverluste bedingten Druckabfall:

$$\Delta P_S = \frac{4}{D_m} \cdot 0{,}0288\,\gamma_R \cdot \frac{w_m{}^2}{2g} \left( \frac{10^6 \cdot \nu}{w_m \cdot H} \right)^{1/4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18).$$

$\nu$ ist die kinematische Zähigkeit:

$$\nu = \frac{\mu \cdot g}{\gamma_R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19).$$

Ein anderer Ausdruck für $T_o$ ergibt sich aus folgender Gleichung:

$$Q_W - Q_R = G_R \cdot \lvert c^m \rvert_{T_o}^{T_u} (T_u - T_o) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20).$$

Die Höhe $H_o$ der Schornsteinmündung über dem Fabrikboden wird durch die Stärke des natürlichen Auftriebes der Verbrennungsgase vorgeschrieben. Der erwähnte Auftrieb tritt eigentlich bei ruhenden, dann beschleunigten Rauchgasen auf, d. h. beim Anlaufen des Systems infolge des Unterschiedes vom spezifischen Gewicht zwischen Rauchgasen und Außenluft. Bei Schornsteinen mit natürlichem Zuge ist der Rauchgasauftrieb die einzige vorhandene hochsaugende Kraft. Er bewirkt, daß die beim Anlaufen des Systems (Verbrennungsapparat + Rauchgaskanäle + Schornstein) erst entstehende heiße Rauchgassäule einen bestimmten Zug auf die sich im Feuerraum entwickelnde Gasmenge ausübt. Dadurch wird diese Rauchgasmenge nach der Schornsteinmündung forttransportiert, damit sich immer neue Gasmengen im Feuerraum bilden können.

Im Falle eines zylindrischen Schornsteines, wie in Abb. 2 dargestellt, ist die Höhe $H_o$ der Schornsteinmündung durch folgende Gleichung gegeben:

$$H_o = \frac{\left| \Delta P \right|_u^F + \Delta P_S + \gamma_R \dfrac{w_o^2}{2g}}{\gamma_L - \gamma_R} \qquad (22),$$

dann gilt folgende Formel:

$$\gamma_L \cdot H_o \cdot F - \gamma_R \cdot H_o F = \left| \Delta P \right|_u^F + \Delta P_S + \gamma_R \frac{w_o^2}{2g} \qquad (23).$$

Dagegen ergibt sich im Falle eines spitzlaufenden, auf dem Kesseldache sitzenden Schornsteines (Abb. 3), der einem Kessel mit gleichmäßiger Konizität der Rauchgaswege angeschlossen ist,

$$H_o = \frac{\gamma_L \cdot H' \cdot F_a - F_m \left[ \left| \Delta P \right|_u^F + \Delta P_S + \gamma_R \dfrac{w_o^2}{2g} \right]}{\dfrac{\gamma_R}{3} \left( F_a + F_o + \sqrt{F_a \cdot F_o} \right)} \qquad (24),$$

weil der konischen Rauchgassäule eine zylindrische Luftsäule von Höhe $H'$ und von derselben Grundfläche $F_a$ (Abb. 3) entspricht. $F_m$ ist gleich $\dfrac{F_o + F_a}{2}$.

Andererseits resultiert mit Bezug auf Gl. (1):

$$H_o + H_b = \frac{P_{\mathrm{at} \cdot 0} - P_{\mathrm{at} \cdot (H_o + H_b)}}{P_{\mathrm{at} \cdot 0} \dfrac{3{,}28}{33000}} = \frac{P_{\mathrm{at} \cdot 0} - P_o}{P_{\mathrm{at} \cdot 0} \dfrac{3{,}28}{33000}} \qquad (25).$$

Darin bezeichnet $H_b$ die Höhe in m des Fabrikbodens über dem Meeresspiegel.

Für den Schornsteinweg lautet die Kontinuitätsgleichung:

$$w_o \cdot F_o \cdot \frac{P_o}{R \cdot T_o} = w_u \cdot F_u \cdot \frac{P_u}{R \cdot T_u} \qquad (26),$$

woraus man erhält:

$$w_o = w_u \cdot \frac{F_u}{F_o} \cdot \frac{P_u \cdot T_o}{P_o \cdot T_u} = w_u \cdot \frac{F_u}{F_o} \cdot \left( \frac{P_u}{P_o} \right)^{\frac{1}{m}} \qquad (27).$$

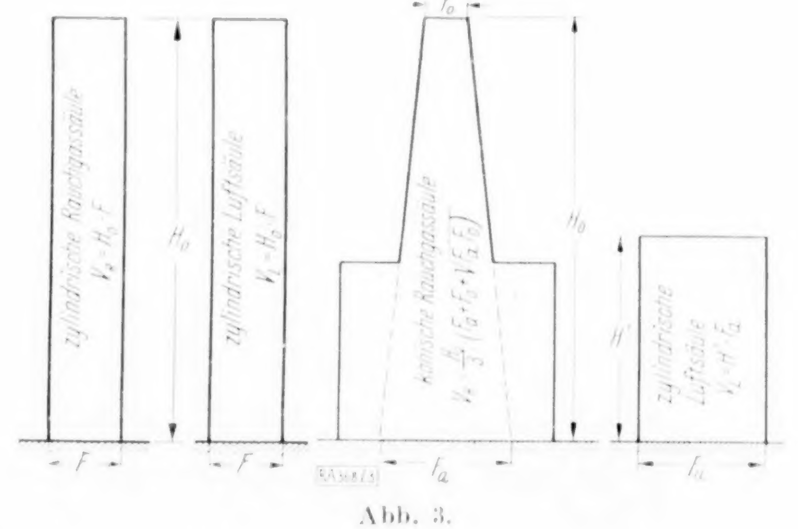



Abb. 3.

Integriert man die Energiegleichung (5), dann ergibt sich:

$$A \frac{w_o^2 - w_u^2}{2g} + \left| c_p^m \right|_{t_o}^{t_u} (T_o - T_u) + A \left( \frac{P_u - P_o}{\gamma_R} \right) - \frac{w_u^2}{2g} + \left| c^m \right|_{t_o}^{t_u} (T_u - T_o) = 0 \qquad (28)$$

und mit Einführung der für $T_o$ und $w_o$ abgebildeten Werte (Gl. 15 und 27):

$$w_u^2 \left\{ \left( \frac{F_u}{F_o} \right)^2 \left( \frac{P_u}{P_o} \right)^{\frac{2}{m}} - 2 \right\} + 2g \left\{ E \frac{m}{m-1} \left| c_v^m \right|_{t_o}^{t_u} \frac{m-2}{m-1} \left| c_p^m \right|_{t_o}^{t_u} \cdot T_u \left[ \left( \frac{P_o}{P_u} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right] + \frac{P_u - P_o}{\gamma_R} \right\} = 0 \qquad (29),$$

woraus man erhält:

$$D_o = D_u \sqrt[4]{\frac{\left( \dfrac{P_u}{P_o} \right)^{\frac{2}{m}}}{2 + \dfrac{2g}{w_u^2} \left\{ \dfrac{E}{m-1} \left[ m \left| c_v \right|_{t_o}^{t_u} + (m-2) \left| c_p \right|_{t_o}^{t_u} \right] T_u \left[ 1 - \left( \dfrac{P_o}{P_u} \right)^{\frac{m-1}{m}} \right] - \dfrac{P_u - P_o}{\gamma_R} \right\}}} \qquad (30).$$

Aus einer eingehenden Nachprüfung des angegebenen Rechnungganges und insbesondere der Beiwertsbestimmung hat sich ergeben, daß die Wirkungsweise der Schornsteine mit natürlichem Zug hauptsächlich von dem Wert des erzielten Verhältnis:

$$\frac{D_u - D_o}{H}$$

abhängig ist.

Dieses Verhältnis wollen wir deshalb als „Konizitätskennziffer" eines Schornsteines bezeichnen.

# Eine neue Methode zur Integration der linearen, partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung vom hyperbolischen Typus.

Von *G. Ackermann* in München.

Die Integration der hyperbolischen, partiellen Differentialgleichung mit zwei unabhängig Veränderlichen kann, abgesehen von einigen speziellen Fällen, in denen die Laplacesche Kaskadenmethode zum Ziele führt, allgemein mit der Riemannschen Methode erfolgen. Für den Fall der konstanten Koeffizienten wird dabei die Greensche Funktion im Sinne Riemanns gleich 1 oder gleich der Besselschen Funktion nullter Ordnung des Argumentes $2\sqrt{(c-ab)(x-\xi)(y-\eta)}$. Sind die Koeffizienten der Differentialgleichung von $x$ und $y$ abhängig, so ist die Riemannsche Funktion durch sukzessive Approximationen herzustellen.

Im folgenden wird für die erste und zweite Randwertaufgabe gezeigt, daß sich das Integral der hyperbolischen Differentialgleichung stets durch eine Volterrasche Integralgleichung zweiter Art darstellen läßt. Einen unmittelbaren Weg für den Existenz- und Konvergenzbeweis bietet damit die Theorie der Integralgleichungen selbst. Die zur Auflösung dieser Integralgleichung angesetzte Neumannsche Reihe besitzt den Vorteil, daß die im Nenner der Glieder auftretenden Fakultäten eine rasche Konvergenz sicherstellen und dadurch dieses Verfahren vor allem auch zur numerischen Rechnung geeignet machen.

Die hyperbolische Gleichung hat die Normalform:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+c\,u=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Die Koeffizienten $a(x,y)$, $b(x,y)$ und $c(x,y)$ seien als differenzierbare, stetige Funktionen vorausgesetzt.

Führt man nun neben der gesuchten Funktion $u$ eine zunächst ebenfalls unbekannte Funktion $t(x,y)$ als abhängige Hilfsvariable ein, so läßt sich zeigen, daß Gl. (1) immer in ein System von zwei linearen, partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung so zerlegt werden kann, daß in jeder der beiden Gleichungen nur der Differentialquotient von einer abhängigen Variablen nach einer unabhängigen Variablen auftritt. Das allgemeinste derartige System besitzt die Form:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\beta u=t \quad . \quad . \quad (\mathrm{I}) \qquad \frac{\partial t}{\partial y}+\alpha t=\gamma u \quad . \quad . \quad (\mathrm{II}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Wird die auf diese Weise der Funktion $u$ koordinierte Hilfsfunktion $t$ aus dem System (2) eliminiert, so entsteht die hyperbolische Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial u}{\partial y}+\left(\alpha\beta+\frac{\partial\beta}{\partial y}-\gamma\right)u=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Durch Elimination von $u$ aus Gl. (I) und (II) würde man naturgemäß ebenfalls eine Gleichung 2. Ordnung vom hyperbolischen Typus erhalten.

Sollen nun Gl. (1) und (3) identisch sein, so müssen zwischen den Koeffizienten folgende Beziehungen bestehen:

$$\alpha=a\,,\quad \beta=b\,,\quad \gamma=a\,b+\frac{\partial a}{\partial y}-c,\quad \text{oder}\quad c=\alpha\beta+\frac{\partial\beta}{\partial y}-\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Die Funktionen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ lassen sich demnach aus den Koeffizienten der Gl. (1) ermitteln, es wird durch die Gl. (4) jeder Gl. (1) das System (2) von partiellen Differentialgleichungen auf eine und nur eine Weise zugeordnet.

Denkt man sich die Lösung der Differentialgleichung (1) für ein beliebiges, eindeutiges Randwertproblem gefunden, so ist mit $u(x,y)$ sofort auch $t(x,y)$ nach Gl. (I) bestimmt. Durch die Randbedingungen, welche der Funktion $u$ vorgeschrieben sind, müssen daher gleichzeitig auch die Randwerte der Funktion $t$ festgelegt sein. Von dieser Tatsache wird bei der endgültigen Bestimmung von $u$ aus dem System (2) Gebrauch zu machen sein.

In dem System (2) kann jede der beiden Gleichungen als gewöhnliche, lineare Differentialgleichung aufgefaßt und durch Variation der Konstanten integriert werden. Bei der Integration der Gl. (I) tritt dann eine willkürliche Funktion von $y$, bei der von Gl. (II) eine solche von $x$ auf. Davon soll im folgenden immer ausgegangen werden.

**Die zweite Randwertaufgabe**[1], die ich wegen ihrer großen praktischen Bedeutung zunächst behandeln will, verlangt die Funktion $u$ so zu finden, daß diese längs zwei Charakteristiken, vorgeschriebene Werte annimmt. Unbeschadet der Allgemeinheit gilt also hier:

$$x=0, \quad u=\psi(y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5); \qquad y=0, \quad u=\varphi(x) \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Für $x=0$ und $y=0$ muß natürlich $\varphi$ gleich $\psi$ sein. Integriert man nun Gl. (I) unter Beachtung von Gl. (5), so ergibt sich:

$$u(x,y)=e^{-\int\limits_0^x \beta(\xi,y)\,d\xi}\left[\int\limits_0^x e^{+\int\limits_0^\xi \beta(\xi',y)\,d\xi'}\, t(\xi,y)\,d\xi+\psi(y)\right] \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Um die Gl. (II) integrieren zu können, müssen zunächst die Randwerte von $t$ für $y=0$ ermittelt werden. Zu diesem Zwecke setzt man die Bedingung (6) in Gl. (I) ein und erhält:

$$y=0, \qquad t=\frac{d\varphi(x)}{dx}+\beta(x,0)\,\varphi(x) \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Mit Gl. (8) ergibt dann Gl. (II) integriert:

$$t(x,y)=e^{-\int\limits_0^y \alpha(x,\eta)\,d\eta}\left[\int\limits_0^y e^{+\int\limits_0^\eta \alpha(x,\eta')\,d\eta'}\,\gamma(x,\eta)\,u(x,\eta)\,d\eta+\frac{d\varphi(x)}{dx}+\beta(x,0)\,\varphi(x)\right] \quad (9).$$

In den Gl. (7) und (9) ist $\xi$ die zu $x$, und $\eta$ die zu $y$ gehörige Integrationsvariable.

Ersetzt man jetzt in Gl. (7) die unter dem Integral stehende Funktion $t$ durch Gl. (8), so entsteht für $u$ die erwähnte Volterrasche Integralgleichung zweiter Art mit zwei unabhängig Veränderlichen. Es ist

$$\left.\begin{aligned} u(x,y)=\;& e^{-\int\limits_0^x \beta(\xi,y)\,d\xi}\int\limits_0^x\int\limits_0^y e^{+\int\limits_0^\xi \beta(\xi',y)\,d\xi'+\int\limits_0^\eta \alpha(\xi,\eta')\,d\eta'-\int\limits_0^y \alpha(\xi,\eta)\,d\eta}\,\gamma(\xi,\eta)\,u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \\ &+e^{-\int\limits_0^x \beta(\xi,y)\,d\xi}\int\limits_0^x e^{+\int\limits_0^\xi \beta(\xi',y)\,d\xi'-\int\limits_0^y \alpha(\xi,\eta)\,d\eta}\left(\frac{d\varphi(\xi)}{d\xi}+\beta(\xi,0)\,\varphi(\xi)\right)d\xi \\ &+e^{-\int\limits_0^x \beta(\xi,y)\,d\xi}\,\psi(y) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Die Gl. (10) besitzt nicht die allgemeinste Form der Integralgleichung mit zwei unabhängigen Variablen. Es tritt die unbekannte Funktion nur unter dem Doppelintegral auf, und weiter ist der Kern dieses Integrals nur von $\xi$, $\eta$ und $y$, nicht auch von $x$ abhängig. Hierdurch erfährt besonders die numerische Rechnung eine bedeutende Vereinfachung. Daß die Gl. (10) die gestellten Randbedingungen erfüllt, geht aus ihrer Aufstellung hervor, man kann sich aber leicht auch noch nachträglich davon überzeugen. Für $x=0$ fallen alle Integrale fort und es ist entsprechend Gl. (5) $u(0,y)=\psi(y)$. Für $y=0$ wird aus Gl. (10)

$$u(x,0)=e^{-\int\limits_0^x \beta(\xi,0)\,d\xi}\left[\psi(0)+\int\limits_0^x e^{+\int\limits_0^\xi \beta(\xi',0)\,d\xi'}\beta(\xi,0)\,\varphi(\xi)\,d\xi+\int\limits_0^x e^{+\int\limits_0^\xi \beta(\xi',0)\,d\xi'}\frac{d\varphi(\xi)}{d\xi}\,d\xi\right] \quad . \quad (11).$$

Formt man in der Gl. (11) den letzten Summanden des Klammerausdruckes durch partielle Integration um, so kann man für diesen schreiben:

$$e^{+\int\limits_0^x \beta(\xi,0)\,d\xi}\,\varphi(x)-\varphi(0)-\int\limits_0^x e^{+\int\limits_0^\xi \beta(\xi',0)\,d\xi'}\beta(\xi,0)\,\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Mit dieser Umwandlung geht Gl. (11) über in

$$u(x,0)=\varphi(x)+e^{-\int\limits_0^x \beta(\xi,0)\,d\xi}\,(\psi(0)-\varphi(0)).$$

Wegen $\psi(0)=\varphi(0)$ wird $u(x,0)=\varphi(x)$, es ist also auch die Randbedingung (6) erfüllt.

[1]) Ich schließe mich hier der Übung an, die Vorgabe der Funktionswerte auf zwei sich schneidenden Charakteristiken als „zweite Randwertaufgabe" zu bezeichnen (siehe auch Frank-v. Mises: Differentialgleichungen der Physik, Teil I, 1930, S. 815). Dementsprechend wurde das Problem, die Funktion $u$ zu finden, wenn auf einer einzigen Kurve $u$ und ihre Normalableitungen gegeben sind, als „erste Randwertaufgabe" benannt, obwohl man bei der hyperbolischen Differentialgleichung nicht von einem Randwertproblem im Sinne der Potentialtheorie sprechen kann.

Treffen wir für den Kern des Doppelintegrales der Gl. (10) die Abkürzung:

$$e^{+\int_0^{\xi}\beta(\xi',y)\,d\xi'-\int_{\eta}^{y}\alpha(\xi,\eta')\,d\eta'}\,\gamma(\xi,\eta)=K_2(\xi,\eta,y) \quad \ldots \quad (12),$$

und setzen wir ferner

$$e^{-\int_0^x\beta(\xi,y)\,d\xi}\left|\psi(y)+\int_0^x e^{+\int_0^{\xi}\beta(\xi',y)\,d\xi'-\int_0^y\alpha(\xi,\eta)\,d\eta}\left(\frac{d\varphi(\xi)}{d\xi}+\beta(\xi,0)\,\varphi(\xi)\right)d\xi\right|=F_2(x,y) \quad . \quad (13),$$

wobei $F_2$ und $K_2$ nach dem Vorhergehenden bekannte Funktionen sind, so schreibt sich Gl. (10) in der Form:

$$u(x\,y)=e^{-\int_0^x\beta(\xi,y)\,d\xi}\int_0^x\int_0^y K_2(\xi,\eta,y)\,u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta+F_2(x,y) \quad \ldots \quad (14).$$

Gl. (14) besitzt eine und nur eine Lösung[2]). Multipliziert man in Gl. (14) das Doppelintegral mit dem Parameter $\lambda$, so kann diese Lösung nach Neumann als Potenzreihe von $\lambda$ angeschrieben werden. Es ist

$$u(x,y)=u_0(x,y)+\lambda\,u_1(x,y)+\lambda^2\,u_2(x,y) \quad \ldots \quad +\lambda^n\,u_n(x,y) \quad \ldots \quad (15).$$

Setzt man die Reihe (15) in Gl. (14) ein, dann ergeben sich mit der Bedingung, daß auf beiden Seiten der Gleichung die Faktoren gleicher Potenzen von $\lambda$ gleich sein müssen, folgende Bestimmungsgleichungen[3]) für die Glieder der Reihe (15):

$$\left.\begin{aligned}
u_0(x,y)&=F_2(x,y),\\
u_1(x,y)&=e^{-\int_0^x\beta(\xi,y)\,d\xi}\int_0^x\int_0^y K_2(\xi,\eta,y)\,u_0(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,\\
u_2(x,y)&=e^{-\int_0^x\beta(\xi,y)\,d\xi}\int_0^x\int_0^y K_2(\xi,\eta,y)\,u_1(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
u_n(x,y)&=e^{-\int_0^x\beta(\xi,y)\,d\xi}\int_0^x\int_0^y K_2(\xi,\eta,y)\,u_{n-1}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta
\end{aligned}\right| \quad \ldots \quad (16).$$

Wird jetzt der Parameter $\lambda$ wieder gleich 1 gesetzt, so nimmt die allgemeine Lösung der hyperbolischen Differentialgleichung für die zweite Randwertaufgabe die Form an:

$$u(x,y)=u_0(x,y)+u_1(x,y)+u_2(x,y) \quad \ldots \quad +u_n(x,y) \quad \ldots \quad (17).$$

**Die erste Randwertaufgabe** schreibt die Werte $u$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ längs einer gegebenen Kurve $C(x,y)$ vor. Die Kurve $C$ sei explizit sowohl in $x$ als auch in $y$ gegeben, also

$$\left.\begin{aligned} y&=C_1(x)\\ x&=C_2(y)\end{aligned}\right\}\ C(x,y)=0,$$

und werde von jeder Achsenparallelen nur in einem Punkte geschnitten. Sind auch die vorgeschriebenen Werte von $u$ auf $C$ explizit in beiden Variablen bekannt, dann kann die Aufgabe folgendermaßen formuliert werden:

Für $x=C_2(y)$ sei $u=f_2(y)$ $[=f_1(x)]$ . . . . . (18),

und für $y=C_1(x)$ werde $\frac{\partial u}{\partial x}=g(x)$ . . . . . (19).

Zur Lösung werde die Differentialgleichung (1) wieder in das System (2) zerlegt. Integriert man hierauf Gl. (I) unter Einführung der Bedingung (18), so erhält man:

$$u(x,y)=e^{-\int_{C_2(y)}^x\beta(\xi,y)\,d\xi}\left|\int_{C_2(y)}^x e^{+\int_{C_2(y)}^{\xi}\beta(\xi',y)\,d\xi'}\,t(\xi,y)\,d\xi+f_2(y)\right| \quad \ldots \quad (20).$$

Zur Integration der Gl. (II) muß man die Randwerte von $t$ auf $C$ kennen. Um diese zu bestimmen, setzen wir Gl. (19) in Gl. (I) ein und erhalten:

auf $y=C_1(x)$ ist $t=g(x)+\beta(x,C_1(x))\cdot f_1(x)$ . . . . . (21).

[2]) Vgl. E. Goursat: Cours d'analyse mathématique, Tome III, Paris 1927, S. 332.

[3]) Vgl. auch Volterra: Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles, Paris 1913, S. 78.

Mit Gl. (21) liefert Gl. (II) integriert:

$$t(x,y) = e^{-\int\limits_{C_1(x)}^{y} \alpha(x,\eta)\,d\eta} \left| \int\limits_{C_1(x)}^{y} e^{+\int\limits_{C_1(x)}^{\eta} \alpha(x,\eta')\,d\eta'} \gamma(x,\eta)\,u(x,\eta)\,d\eta + g(x) + \beta(x, C_1(x))\,f_1(x) \right| \quad . \; . \; . \; . \quad (22).$$

Wir ersetzen jetzt wieder die in Gl. (20) unter dem Integral stehende Hilfsfunktion $t$ durch die Gl. (22) und erhalten für $u$ die Volterrasche Integralgleichung:

$$\left. \begin{aligned} u(x,y) = {} & e^{-\int\limits_{C_2(y)}^{x} \beta(\xi,y)\,d\xi} \int\limits_{C_2(y)}^{x} \int\limits_{C_1(x)}^{y} e^{+\int\limits_{C_2(y)}^{\xi} \beta(\xi',y)\,d\xi' - \int\limits_{\eta}^{y} \alpha(\xi,\eta')\,d\eta'} \gamma(\xi,\eta)\,u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \\ & + e^{-\int\limits_{C_2(y)}^{x} \beta(\xi,y)\,d\xi} \int\limits_{C_2(y)}^{x} e^{+\int\limits_{C_2(y)}^{\xi} \beta(\xi',y)\,d\xi' - \int\limits_{C_1(\xi)}^{y} \alpha(\xi,\eta)\,d\eta} \big(g(\xi) + \beta(\xi, C_1(\xi))\,f_1(\xi)\big)\,d\xi \\ & + e^{-\int\limits_{C_2(y)}^{x} \beta(\xi,y)\,d\xi} f_2(y) \end{aligned} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23).$$

Gl. (23) ist ihrer Herleitung gemäß ähnlich aufgebaut wie Gl. (10). Auch hier tritt die gesuchte Funktion $u$ neben der linken Seite nur unter dem Doppelintegral auf, und der Kern dieses Integrales ist auch hier nur von $\xi$, $\eta$ und $y$ abhängig. Ebenso ließe sich wieder leicht nachweisen, daß Gl. (23) die geforderten Randbedingungen erfüllt.

Führen wir auch hier wieder für den Kern des Doppelintegrales die Abkürzung:

$$e^{+\int\limits_{C_2(y)}^{\xi} \beta(\xi',y)\,d\xi - \int\limits_{\eta}^{y} \alpha(\xi,\eta')\,d\eta'} \gamma(\xi,\eta) = K_1(\xi,\eta,y) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

ein, und setzen wir

$$e^{-\int\limits_{C_2(y)}^{x} \beta(\xi,y)\,d\xi} \left| f_2(y) + \int\limits_{C_2(y)}^{x} e^{+\int\limits_{C_2(y)}^{\xi} \beta(\xi',y)\,d\xi' - \int\limits_{C_1(\xi)}^{y} \alpha(\xi,\eta)\,d\eta} \big(g(\xi) + \beta(\xi, C_1(\xi))\,f_1(\xi)\big)\,d\xi \right| = F_1(x,y) \quad . \; . \quad (25),$$

dann geht Gl. (23) über in

$$u(x,y) = e^{-\int\limits_{C_2(y)}^{x} \beta(\xi,y)\,d\xi} \int\limits_{C_2(y)}^{x} \int\limits_{C_1(x)}^{y} K_1(\xi,\eta,y)\,u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta + F_1(x,y) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26).$$

Die Auflösung dieser Gleichung und damit die Lösung der ersten Randwertaufgabe für die hyperbolische Differentialgleichung erfolgt in derselben Weise wie bei Gl. (14). Die in den Bestimmungsgleichungen (16) für die einzelnen Glieder der Neumannschen Reihe auftretenden Integrale können dabei je nach der Beschaffenheit der Funktionen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und $C$, $f$, $g$ bzw. $\varphi$, $\psi$, analytisch oder graphisch ermittelt werden. Denkt man sich die Funktion $F(x,y)$ und den Kern $K(\xi,\eta,y)$ jeweils in eine Potenzreihe entwickelt, dann ist einzusehen, daß durch die fortlaufenden Integrationen, wie es die Gl. (16) vorschreiben, im Nenner der Potenzen für die Glieder $u_{1,2,\ldots n}$ Fakultäten entstehen, die eine beschleunigte Konvergenz zur Folge haben. Für praktische Fälle wird man daher größtenteils die Reihe (17) schon nach dem fünften oder sechsten Gliede abbrechen können.

Schließlich sei noch auf eine Besonderheit bei der ersten Randwertaufgabe hingewiesen. Ist statt der Randbedingung (19) irgendein Zusammenhang von $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ auf der Kurve $C$ verlangt, so kann man so vorgehen, daß man bei der Integration der koordinierten Funktion $t$ Gl. (II) zunächst eine unbekannte Funktion $\varphi(x)$ auf der Kurve $C$ einführt. Durch Einsetzen der auf diese Weise erhaltenen Volterraschen Gleichung in die zu erfüllende Randbedingung, läßt sich dann rückwärts $\varphi(x)$ bestimmen.

Für diesen Fall und für die zweite Randwertaufgabe sollen nun mehrere Beispiele herangezogen werden.

**Einfache Beispiele.** Die in der mathematischen Physik viel behandelte und im neuen „Riemann-Weber" zur Einführung in die Riemannsche Integrationsmethode benutzte Differentialgleichung der schwingenden Saite lautet[4]):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = 0 \,.$$

[4]) v. Mises: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, I. Teil, S. 793. Braunschweig 1930.

Die Integrationsbedingungen für die unendlich lange Seite sind:

$$t=0, \quad w(s,0)=f(s) \text{ und } \frac{\partial w(s,0)}{\partial t}=g(s).$$

Mit der Koordinatentransformation:

$$t=\frac{y-x}{2a} \text{ und } s=\frac{y+x}{2}$$

geht die Differentialgleichung über in:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=0 \quad \ldots \quad (27).$$

Die Randbedingungen schreiben sich dann:

$$y=x, \quad u=f(x)=f(y) \quad \ldots \quad (28) \quad \text{und} \quad y=x, \quad a\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)=g(x) \quad \ldots \quad (29).$$

Für die Zerlegung von Gl. (27) in das System (2) liefern die Gl. (4) folgende Koeffizienten:

$$\alpha=0, \quad \beta=0, \quad \gamma=0;$$

das System nimmt also hier die Form an:

$$\frac{\partial u}{\partial x}-t=0 \quad \ldots \quad (30), \qquad \frac{\partial t}{\partial y}=0 \quad \ldots \quad (31).$$

Unter Beachtung von Gl. (28) ergibt Gl. (30) integriert:

$$u(x,y)=\int_y^x t(\xi,y)\,d\xi+f(y) \quad \ldots \quad (32).$$

Gemäß Gl. (31) wird $t$ als eine zunächst unbekannte Funktion $\varphi(x)$ eingesetzt. Aus (32) wird damit

$$u(x,y)=\int_y^x \varphi(\xi)\,d\xi+f(y) \quad \ldots \quad (33).$$

Der Gl. (33) entnehmen wir:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi(x) \text{ und } \frac{\partial u}{\partial y}=-\varphi(y)+f'(y) \quad \ldots \quad (34).$$

Setzen wir die Differentialquotienten (34) in die Randbedingungen (29) ein, so muß sein:

$$a\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=y=\xi}=a(-\varphi(\xi)+f'(\xi)-\varphi(\xi))=g(\xi),$$

oder

$$\varphi(\xi)=-\frac{1}{2a}g(\xi)+\frac{1}{2}f'(\xi) \quad \ldots \quad (35).$$

Nach Einsetzung von (35) in Gl. (33) erhält man die bekannte Lösung:

$$u(x,y)=\frac{1}{2}(f(x)+f(y))+\frac{1}{2a}\cdot\int_x^y g(\xi)\,d\xi.$$

Als weiteres Beispiel werde die sogenannte Telegraphengleichung behandelt[5]). Diese hat die Form

$$c^2\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}-\alpha\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-2\beta\frac{\partial U}{\partial t}=0 \quad \ldots \quad (36).$$

Die Randbedingungen sind wieder:

$$t=0, \quad U=f(s) \text{ und } \frac{\partial U}{\partial t}=g(s).$$

Führt man $x$ und $y$ entsprechend den Gleichungen

$$s=\frac{\alpha c}{\beta}(x+y) \text{ und } t=\frac{\alpha^2}{\beta}(y-x)$$

[5]) v. Mises: loc. cit. S. 813.

als neue Koordinaten ein, so geht Gl. (36) über in die Normalform:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (37),$$

und die Randbedingungen sind:

$$x=y, \quad u=f\left(\frac{2ac}{\beta}x\right)=f\left(\frac{2ac}{\beta}y\right) \quad . \quad (38) \quad \text{und} \quad x=y, \quad \frac{\beta}{2a^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)=g\left(\frac{2ac}{\beta}x\right) \quad . \quad (39).$$

Gl. (37) läßt sich mit den Gl. (4) in das System:

$$\frac{\partial u}{\partial x}-u=t \quad \ldots \quad (40), \qquad \frac{\partial t}{\partial y}+t=-u \quad \ldots \quad (41)$$

zerlegen. Integriert man Gl. (40) unter Beachtung von (38), so erhält man:

$$u(x,y)=e^{x-y}\left[\int_y^x e^{-\xi+y}\, t(\xi,y)\, d\xi+f\left(\frac{2ac}{\beta}y\right)\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (42).$$

Führt man nun die Bedingung ein, daß für $x=y$ die Hilfsfunktion $t$ gleich einer noch zu bestimmenden Funktion $\varphi\left(\frac{2ac}{\beta}x\right)$ sein soll, dann ergibt die Integration von Gl. (41)

$$t(x,y)=-e^{x-y}\left[\int_x^y e^{-x+\eta}\, u(x,\eta)\, d\eta-\varphi\left(\frac{2ac}{\beta}x\right)\right] \quad \ldots \ldots \quad (43).$$

Durch Einsetzen von Gl. (43) in (42) entsteht die Integralgleichung:

$$u(x,y)=e^{x-y}\left[-\int_y^x\int_\xi^y e^{-\xi+\eta}\, u(\xi,\eta)\, d\eta\, d\xi+\int_y^x \varphi\left(\frac{2ac}{\beta}\xi\right) d\xi+f\left(\frac{2ac}{\beta}y\right)\right] \quad \ldots \quad (44).$$

Bilden wir mit Hilfe der Gl. (44) die Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ auf der Geraden $x=y$, so erhalten wir mit Gl. (39):

$$\varphi\left(\frac{2ac}{\beta}\xi\right)=-\frac{a^2}{\beta}\, g\left(\frac{2ac}{\beta}\xi\right)-f\left(\frac{2ac}{\beta}\xi\right)+f'\left(\frac{2ac}{\beta}\xi\right) \quad \ldots \ldots \quad (45).$$

Dieser Ausdruck für $\varphi$ wird in Gl. (44) eingeführt, und wir erhalten damit schließlich die Lösung:

$$\left.\begin{aligned} u(x,y)=e^{x-y}\Bigg\{&-\int_y^x\int_\xi^y e^{-\xi+\eta}\, u(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \\ &-\int_y^x\left[\frac{a^2}{\beta}\, g\left(\frac{2ac}{\beta}\xi\right)+f\left(\frac{2ac}{\beta}\xi\right)\right] d\xi+\frac{1}{2}\, f\left(\frac{2ac}{\beta}x\right)+\frac{1}{2}\, f\left(\frac{2ac}{\beta}y\right)\Bigg\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (46).$$

Die Auflösung der Integralgleichung (46) durch die Neumannsche Reihe muß identisch sein mit der durch die Riemannsche Methode gelieferten Lösung dieser Aufgabe. Es müssen sich demnach die Besselschen Funktionen nullter und erster Ordnung durch Reihenentwicklungen mit $e$-Funktionen, welche, wie wir gesehen haben, die aufgestellten Volterraschen Integralgleichungen mit sich bringen, darstellen lassen.

Als Beispiel zur zweiten Randwertaufgabe ist eine Arbeit von Nußelt über den Wärmeaustausch zweier im rechten Winkel aneinander vorbeiströmenden Flüssigkeiten[6]) anzuführen. Hier bringt das physikalische Problem bereits das System partieller Differentialgleichungen mit sich. Beide abhängigen Variablen haben also eine physikalische Bedeutung, wodurch sofort auch die Randwerte für beide gegeben sind. Dieses Beispiel zeigt besonders auch die schnelle Konvergenz der Reihe (17).

Die Anwendung des mitgeteilten Lösungsverfahrens auf ein physikalisch-technisches Problem, das nicht konstante Koeffizienten in der Differentialgleichung liefert, ist in Arbeit.

**Zusammenfassung.** Es wird eine neue Methode zur Integration der linearen, partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung mit variablen Koeffizienten angegeben und zunächst an einigen einfachen Beispielen erläutert. Das Verfahren eignet sich wegen der raschen Konvergenz der als Lösung auftretenden Reihe besonders auch zur numerischen Rechnung. 301

[6]) W. Nußelt: Eine neue Formel für den Wärmedurchgang im Kreuzstrom, Zeitschr. f. techn. Mechanik und Thermodynamik 1930, Nr. 12, S. 417.

# Vorträge der Hauptversammlung in Würzburg der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Von den auf der Würzburger Versammlung vom 17. bis 22. September gehaltenen Vorträgen bringen wir im folgenden die von den einzelnen Vortragenden selbst zur Verfügung gestellten Vortragsauszüge. Die vollständige Veröffentlichung einzelner Vorträge bleibt vorbehalten.

## 1. Die Bewegung von Staubteilchen in Kreiselrädern bei Förderung staubführender Medien.

Von *W. Barth* in Völklingen (Saar).

In der Praxis kann man oft die Beobachtung machen, daß die Flügelräder schnellaufender Hochdruckgebläse sehr rasch verschleißen, obwohl auf eine gute Entstaubung der Abgase große Sorgfalt verwendet wurde. Um die Ursachen des raschen Verschleißes aufzuklären, wird im folgenden die Bewegung von Staubteilchen in Kreiselrädern näher untersucht.

Unter Voraussetzung der Gültigkeit des Stokesschen Gesetzes für die Bestimmung des Widerstandes von Staubteilchen lassen sich bei Vernachlässigung der Schwerkraft für den zweidimensionalen Strömungsvorgang folgende Bewegungsgleichungen für Staubteilchen[1] ableiten:

1. in Vektorform

$$g(\bar{v} \rightarrow \bar{c}) = w_f \cdot \frac{d\bar{c}}{dt} \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

2. in cartesischen Koordinaten

$$\left.\begin{aligned} g(v_x - c_x) &= w_f \cdot \frac{dc_x}{dt} \\ g(v_y - c_y) &= w_f \cdot \frac{dc_y}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (2), \qquad \begin{aligned} c_x &= \frac{dx}{dt} & v_x &= \Phi_1(x, y) \\ c_y &= \frac{dy}{dt} & v_y &= \Phi_2(x, y) \end{aligned}$$

3. in Polarkoordinaten

$$\left.\begin{aligned} g(v_r - c_r) &= w_f \left(\frac{dc_r}{dt} - \frac{c_u^2}{r}\right) \\ g(v_u - c_u) &= w_f \left(\frac{dc_u}{dt} + \frac{c_u \cdot c_r}{r}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3), \qquad \begin{aligned} c_r &= \frac{dr}{dt} & v_r &= \psi_1(r, \varphi) \\ c_u &= r \cdot \frac{d\varphi}{dt} & v_u &= \psi_2(r, \varphi) \end{aligned}$$

wobei bedeuten:

$c, c_x, c_y, c_r, c_u$ Geschwindigkeit der Staubteilchen.

$v, v_x, v_y, v_r, v_u$ Entsprechende Geschwindigkeiten des Trägergases.

$x, y$ cartesische Koordinaten.

$r, \varphi$ Polarkoordinaten.

$g$ Erdbeschleunigung.

$t$ Zeit.

$w_f$ Fallgeschwindigkeit des Staubteilchens in ruhendem Gas nach Erreichung des Beharrungszustandes.

Aus Gründen der Einfachheit wurde statt der Korngröße der Staubteilchen die Fallgeschwindigkeit $w_f$ in die Formeln eingeführt. Wenn man die Annahme macht, daß im Laufrad die Meridiangeschwindigkeit $v_r$ und die Umfangsgeschwindigkeit $v_u$ des Trägergases proportional dem Abstand vom Drehpunkt zunimmt, kann eine Lösung der Differentialgleichung (2) und (3) angegeben werden. Diese Bedingung kann beispielsweise in einem Laufrad mit radialen Schaufeln, deren Breite nach außen zu abnimmt annähernd verwirklicht werden. In diesem Fall erhält man folgende Gleichungen:

[1] Vgl. W. Barth: „Die Anwendung des Modellversuches in der Staubtechnik.“ Rauch und Staub (1932), Bd. 22, S. 93.

Gleichung der Stromlinien $r = r_0 e^{\frac{q}{\omega}(\varphi - \varphi_0)}$ . . (4), $q = \frac{v_r}{r} = \text{const}$ $\omega = \frac{v_u}{r} = \text{const}$

Gleichung der Staubbahnen $r = r_0 e^{\frac{k}{f}(\varphi - \varphi_0)}$ . . (5), $c_r = k \cdot r$ $c_u = f \cdot r$

wobei folgende Beziehungen erfüllt sein müssen:

$$q = \frac{w_f}{g}(k^2 - f^2) + k, \qquad \omega = 2\frac{w_f}{g} f \cdot k + f \quad \text{. . . . . . . . . . . . . (6).}$$

Mit $r_0, \varphi_0$ wurden die Koordinaten des Anfangspunktes der Stromlinie bzw. der Staubbahn bezeichnet. Stromlinien und Staubbahnen sind logarithmische Spiralen, welche sich unter einem gewissen Winkel schneiden.

Der Verschleiß der Schaufel wird durch das Auftreffen der Staubteilchen auf die Schaufel bedingt. Je größer die Geschwindigkeit des auftreffenden Staubteilchens relativ zur Schaufel ist und je steiler der Aufprall erfolgt, um so größer muß der Verschleiß werden. In Abb. 1 sind die berechneten Staubbahnen sowohl absolut wie relativ zum Laufrad für verschiedene Korngrößen aufgezeichnet. Es zeigt sich, daß mit kleiner werdender Korngröße die Abweichung der Staubbahn von der Stromlinie immer geringer wird. Bei kleiner Korngröße treffen die Staubteilchen unter einem flachen Winkel auf die Schaufel auf, außerdem kommt ein großer Teil des mitgeführten Staubes überhaupt nicht mit der Schaufel in Berührung.

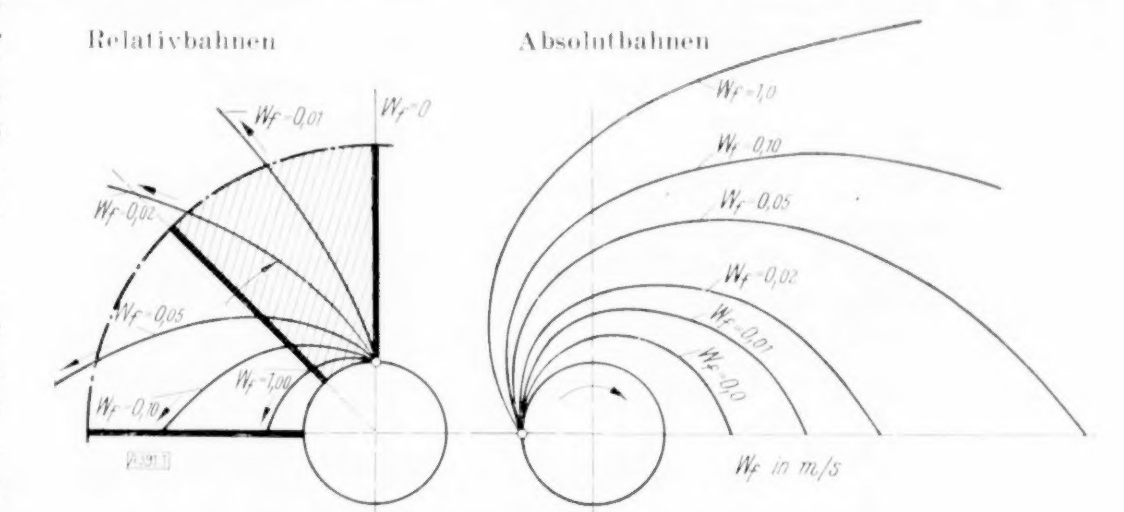
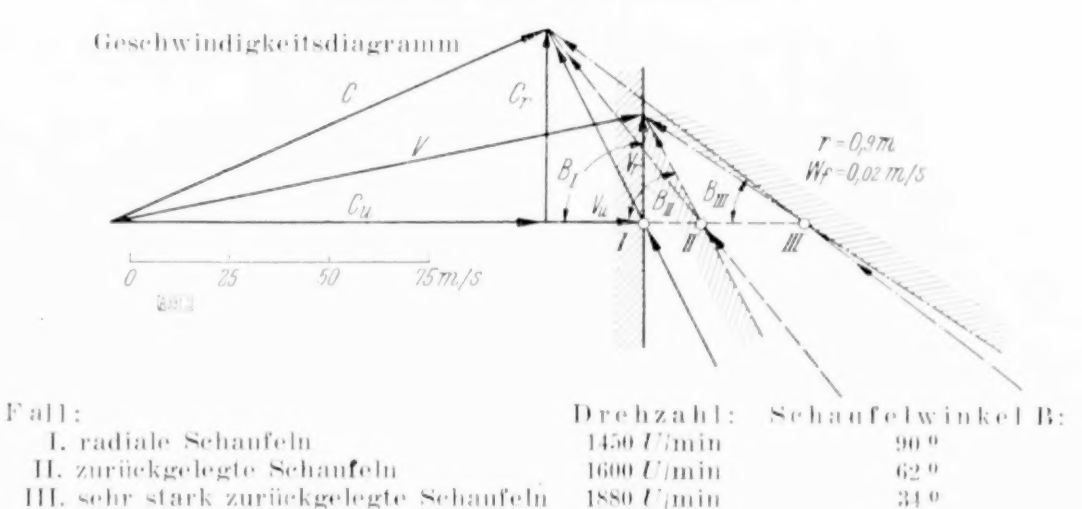



Abb. 1. Bahnen der Staubteilchen bei verschiedener Korngröße.
$q = 30$ 1/sec $\omega = 150$ 1/sec

In Abb. 2 ist das Geschwindigkeitsdiagramm für einen Punkt des Kreiselrades aufgezeichnet. Aus dem Diagramm ergibt sich die bemerkenswerte Tatsache, daß ein Staubteilchen mit einer Fallgeschwindigkeit von nur 0,02 m/sec bei den gegebenen Verhältnissen mit einer Geschwindigkeit von 55 m/sec auf die Schaufel aufprallt. Wählt man statt der radialen Schaufel zurückgelegte Schaufeln und erhöht die Tourenzahl in der Weise, daß die Stromlinien die gleichen bleiben, so erhält man die Geschwindigkeitsdiagramme, deren Endpunkte mit II und III bezeichnet sind. Dabei zeigt sich, daß das Staubkorn, je weiter die Schaufel zurückgelegt wird, unter einem um so flacheren Winkel gegen die Schaufel geschleudert wird. Es kann sogar bei einer sehr stark zurückgelegten Schaufel, wie Diagramm III zeigt, der Fall eintreten, daß das Staubkorn nicht auf die Vorderseite, sondern auf die Rückseite der Schaufel auftrifft.




| Fall: | Drehzahl: | Schaufelwinkel B: |
|---|---|---|
| I. radiale Schaufeln | 1450 U/min | 90° |
| II. zurückgelegte Schaufeln | 1600 U/min | 62° |
| III. sehr stark zurückgelegte Schaufeln | 1880 U/min | 34° |

Abb. 2. Bewegung der Staubteilchen bei verschiedenen Schaufelformen.

Die Berechnung der Staubbahnen in praktischen Fällen macht fast immer die Verwendung anderer Annahmen über die Kreiselradform und anderer Randbedingungen über die Staubbewegung am Eintritt, als sie der vorliegenden Rechnung zugrunde gelegt wurden, erforderlich. In diesen Fällen ist eine Lösung der Differentialgleichungen (2) und (3) in der Regel nicht möglich, jedoch läßt sich fast immer mit Hilfe von Gleichung (1) ein zeichnerisches Verfahren zur Bestimmung der Staubbahnen und Staubgeschwindigkeiten ableiten.

Untersucht man auf diese Weise ausgeführte Laufräder, so findet man, daß die gefährdete Stelle bei Laufrädern mit „stoßfreiem“ Eintritt am Laufradaustritt, bei Eintritt mit „Stoß“ häufig auch am Laufradeintritt liegen kann. Diese theoretischen Erkenntnisse werden

durch die Erfahrung voll und ganz bestätigt. Es konnte an Lichtbildern verschiedener ausgebauter Laufräder gezeigt werden, daß der Verschleiß an den Stellen auftritt, an denen er nach der Rechnung vermutet werden muß. Der größte Verschleiß ist in der Regel am Laufradaustritt, gegenüber der Eintrittsöffnung zu erwarten.

Mit Hilfe dieser Überlegungen können in jedem Fall die geeignetsten Maßnahmen zur Verringerung des Verschleißes vorgeschlagen werden. Im allgemeinen empfiehlt sich das Zurücklegen der Schaufeln, das Anpassen der Schaufelwinkel an die Korngröße, die Verwendung weniger dafür sehr starker Schaufeln, die Verstärkung besonders gefährdeter Stellen, Aufteilung des Gebläses in mehrere Stufen u. dgl. Bei diesen Fragen handelt es sich nicht nur um ein sehr interessantes mathematisches Problem, sondern auch um einen wichtigen praktischen Fall. 391, 1

## 2. Winkelbeschleunigungspläne der ebenen Kinematik und ihre Anwendung.

Von *Rudolf Beyer* in Zwickau (Sa.).

**1. Allgemeines.** In seiner Arbeit „Drehzahlvektorenpläne ebener Getriebe“[1]) hat der Verfasser ein allgemeines Verfahren entwickelt, wie man sämtliche relativen Winkelgeschwindigkeiten $\omega_{pq}$ bzw. die Drehzahlen $n_{pq}$ zwischen allen Getriebegliedern $p, q$ leicht und anschaulich ermitteln kann. Es soll nun gezeigt werden, wie alle dazugehörigen Winkelbeschleunigungen $\varepsilon_{pq} = \dot{\omega}_{pq}$ in ähnlicher Weise bei sinngemäßer Verallgemeinerung des Verfahrens gefunden werden können.

**2. Theoretische Grundlagen.** Für drei komplanbewegliche starre ebene Systeme $g$, $h$ und $i$ mit den Drehpolen $P_{hg}, P_{ih}$ und $P_{gi}$, den durch sie gehenden Drehachsen $k_{hg}, k_{ih}$ und $k_{gi}$ und den in diesen liegenden Winkelgeschwindigkeitspfeilen $\omega_{hg}, \omega_{ih}$ und $\omega_{gi}$ gelten die folgenden ein Gleichgewichtssystem kennzeichnenden vektoriellen Beziehungen:

$$\omega_{gi} + \omega_{ih} + \omega_{hg} = 0; \quad [\mathfrak{r}_3\,\omega_{gi}] + [\mathfrak{r}_2\,\omega_{ih}] + [\mathfrak{r}_1\,\omega_{hg}] = 0 \qquad (1;2),$$

die in Abb. 1[2]) zur Aufstellung des $\omega$-Planes mit Hilfe des $\omega$-Seilecks führen. Es sind hier $\omega_{ih} = \overrightarrow{h'\,i'}$ und $\omega_{gi} = \overrightarrow{i'\,g'}$ aus $\omega_{hg} = \overrightarrow{g'\,h'}$ ermittelt worden.

Die Gleichungen (1; 2) liefern durch Differentiation nach der Zeit

$$\varepsilon_{gi} + \varepsilon_{ih} + \varepsilon_{hg} = 0; \quad [\mathfrak{r}_3\,\varepsilon_{gi}] + [\mathfrak{r}_2\,\varepsilon_{ih}] + [\mathfrak{r}_1\,\varepsilon_{hg}] = \mathfrak{M} \qquad (3;4)$$

mit

$$\mathfrak{M} = [\dot{\mathfrak{r}}_3\,\omega_{ig}] + [\dot{\mathfrak{r}}_2\,\omega_{hi}] + [\dot{\mathfrak{r}}_1\,\omega_{gh}] = [\mathfrak{u}_{gi}\,\omega_{ig}] + [\mathfrak{u}_{ih}\,\omega_{hi}] + [\mathfrak{u}_{hg}\,\omega_{gh}] \qquad (5),$$

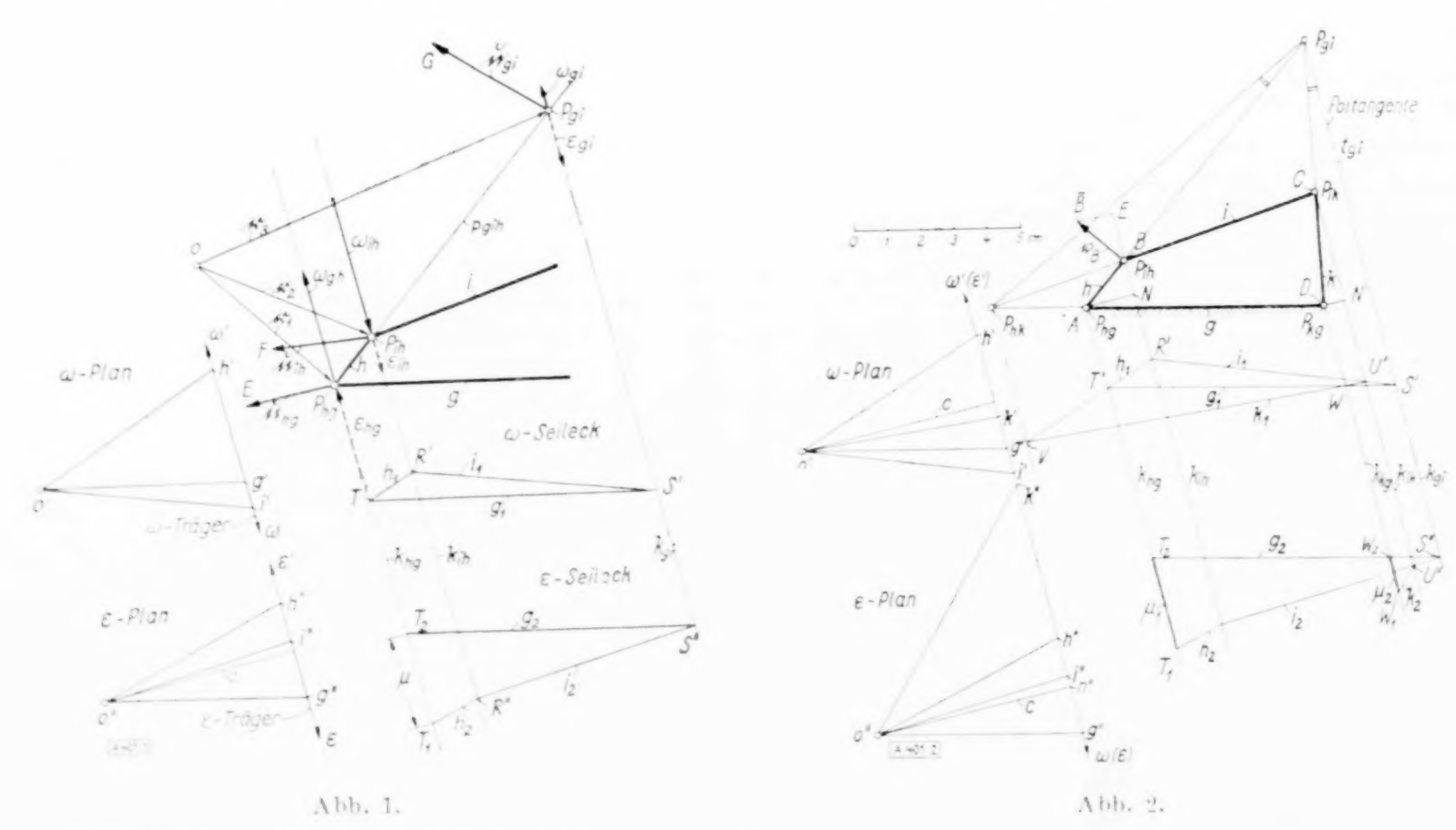



Abb. 1. Abb. 2.

[1]) Zeitschr. f. Instrumentenkunde. 1933. S. 164 bis 172.
[2]) In Abb. 1 ist die Beschriftung $\omega_{gh}$ durch $\omega_{hg}$ zu ersetzen.

worin die $\mathfrak{u}_{pq}$ die entsprechenden Polwechselgeschwindigkeiten bedeuten. Die an die Achsen $k_{pq}$ gebunden gedachten Winkelbeschleunigungspfeile $\varepsilon_{pq}$ reduzieren sich also auf ein Vektorpaar — entsprechend dem Kräftepaar der Statik — vom Moment $\mathfrak{M} = \mu \cdot c$. Das zum geschlossenen Winkelbeschleunigungsplan oder $\varepsilon$-Plan gehörige $\varepsilon$-Seileck muß demnach offen bleiben und z. B. mit seinen Seilstrahlen $g_2$ und $h_2$ auf der Achse $k_{hg}$ die Strecke $\mu = \overline{T_1 T_2}$ abschneiden; $c$ ist dabei der Abstand des Poles $0''$ vom $\varepsilon$-Träger, hat die Dimension einer Winkelbeschleunigung und ist unter Beachtung des Winkelbeschleunigungsmaßstabs aufzutragen. In Abb. 1 sei die gegebene Winkelbeschleunigung $\varepsilon_{hg} = \overrightarrow{g''h''}$ auf dem zu den $k_{pq}$ parallelen $\varepsilon$-Träger abgetragen und dem Richtungssinn von $\varepsilon$ nach $\varepsilon'$ eine „positive" Winkelbeschleunigung, d. h. eine im Gegensinne des Uhrzeigers wirkende, zugeordnet. Die durch $T_1$ und $T_2$ zu den Polstrahlen $0''h''$ bzw. $0''g''$ parallel gezogenen Seilstrahlen $h_2$ bzw. $g_2$ treffen die Achsen $k_{ih}$ und $k_{gi}$ in den Punkten $R''$ bzw. $S''$ und bestimmen so den Seilstrahl $i_2$, der im $\varepsilon$-Plan durch Ziehen des parallelen Polstrahles $0''i''$ die Winkelbeschleunigungen $\varepsilon_{ig} = \overrightarrow{g''i''}$ und $\varepsilon_{ih} = \overrightarrow{h''i''}$ liefert.

**3. Anwendungen.** Die Ermittlung der gemäß Gl. (5) erforderlichen Polwechselgeschwindigkeiten kann bei getriebetechnischen Anwendungen weitestgehend vermieden werden, indem man zweckmäßig von einem feststehenden Gliede (z. B. $g$) ausgeht und die noch beliebige Achsenrichtung $k_{pq}$ zu einer Poltangente (z. B. $t_{gi}$ durch $P_{gi}$) parallel wählt. Dann reduziert sich $\mathfrak{M}$ z. B. im Falle des in Abb. 2 dargestellten Gelenkvierecks (Kurbelschwinge) unter Einführung von $z = \overline{BN}$ auf

$$\mathfrak{M} = \mu \cdot c = [\dot{\mathfrak{r}}_2\, \omega_{hi}] = [\mathfrak{v}_B\, \omega_{hi}] = [\overrightarrow{B\bar{B}}, \omega_{hi}] \text{ vom Betrag } M = z\, \omega_{hg} : \omega_{hi} \quad . \quad . \quad (6).$$

In Gl. (6) ist der Drehsinn des Momentes $\mathfrak{M}$ entsprechend zu beachten und das $\varepsilon$-Seileck diesbezüglich anzuordnen. Der Abb. 2 liegen zwecks Kontrolle durch den Leser die folgenden Maßstäbe zugrunde: Zeichenmaßstab: 1 cm $= a = 0{,}01$ m, Winkelgeschwindigkeitsmaßstab: 1 cm $= w_1 = 1\,\text{sek}^{-1}$ und Winkelbeschleunigungsmaßstab: 1 cm $= w_2 = 1\,\text{sek}^{-2}$. Aus $\omega_{hg} = \overrightarrow{g'h'}$ $= +3{,}6\,\text{sek}^{-1}$ und $\varepsilon_{hg} = \overrightarrow{g''h''} = +3\,\text{sek}^{-2}$ folgt für die Glieder $g, h, i$ der Wert $\mu_1 = -(0{,}01 \cdot 3{,}6 \cdot 4{,}35) : 0{,}06 = -2{,}87\,\text{sek}^{-2}$ und für die Glieder $g, k, i$ der Wert $\mu_2 = -(\overline{CN'} \cdot \omega_{kg} \cdot \omega_{ki})$: $c = -(0{,}034 \cdot 1 \cdot 1{,}8) : 0{,}06 = -1{,}06\,\text{sek}^{-2}$, beide im Uhrzeigersinn drehend, gekennzeichnet durch das Minuszeichen. Ergebnis: $\varepsilon_{ig} = \overrightarrow{g''i''} = +1{,}8\,\text{sek}^{-2}$, $\varepsilon_{ih} = \overrightarrow{h''i''} = -1{,}2\,\text{sek}^{-2}$, $\varepsilon_{kg} = \overrightarrow{g''k''}$ $= +7{,}9\,\text{sek}^{-2}$ usw.

Das Verfahren wurde im Vortrag noch an der umlaufenden Geradschubkurbel erläutert. An einer umlaufenden Kurbelschleife wurde gezeigt, daß man ohne Benutzung des Satzes von Coriolis auskommt und somit größere Anschaulichkeit und Einheitlichkeit der Methode erzielt. Das Verfahren liefert ferner Konstruktionen für den Beschleunigungspol, Tangentialpol (Bressesche Kreise). Es eignet sich auch für kinetostatische Anwendungen und gestattet bei günstiger Wahl der Maßstäbe bisweilen noch weitere Vereinfachungsmöglichkeiten, auf die hier nicht eingegangen werden kann. 401, 2

## 3. Schwingungen zylindrischer Schalen.

Von *W. Flügge* in Göttingen.

Zur Berechnung von Schalenschwingungen benutzt man im allgemeinen das von Rayleigh angegebene Verfahren, das eine dehnungslose Formänderung der Mittelfläche annimmt und unter dieser Voraussetzung die Eigenfrequenzen durch eine einfache Energiebetrachtung bestimmt. Damit wird nur ein kleiner Teil der möglichen Schwingungsformen erfaßt, und für manche oft vorkommenden Randbedingungen liefert es überhaupt nichts, weil man ja Schalen so zu stützen pflegt, daß sie keine dehnungslosen Verbiegungen erfahren können. Es soll daher für den Fall der Kreiszylinderschale die Aufgabe mit den Mitteln der strengen Zylindertheorie in Angriff genommen werden.

Als Koordinaten wählen wir die Entfernung $x$ von einem Zylinderrand und den längs des Umfanges gemessenen Winkel $\varphi$. Führt man in die Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte am Schalenelement als Lasten die bei einer Schwingung entstehenden Trägheitskräfte ein, eliminiert dann die Querkräfte und drückt die übrigen Schnittkräfte durch die drei Komponenten $u$, $v$, $w$ der elastischen Verschiebung aus ($u$ in $x$-Richtung, $v$ in $\varphi$-Richtung, $w$ normal nach außen), so erhält man folgendes Differentialgleichungssystem:

$$u'' + \frac{1-\nu}{2}\,u^{\cdot\cdot} + \frac{1+\nu}{2}\,v'^{\cdot} + \nu\,w' + k\left(\frac{1-\nu}{2}\,u^{\cdot\cdot} - w''' + \frac{1-\nu}{2}\,w'^{\cdot\cdot}\right) = \frac{\mu\,a^2}{D}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{1+\nu}{2}\,u'^{\cdot} + v^{\cdot\cdot} + \frac{1-\nu}{2}\,v'' + w^{\cdot} + k\left(\frac{3}{2}\,(1-\nu)\,v'' - \frac{3-\nu}{2}\,w''^{\cdot}\right) = \frac{\mu\,a^2}{D}\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\nu\,u' + v^{\cdot} + w + k\left(\frac{1-\nu}{2}\,u'^{\cdot\cdot} - u''' - \frac{3-\nu}{2}\,v''^{\cdot} + w^{\mathrm{IV}} + 2\,w''^{\cdot\cdot} + w^{::} + 2\,w^{\cdot\cdot} + w\right) = \frac{\mu\,a^2}{D}\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,.$$

Darin bezeichnen Punkte Ableitungen nach $\varphi$, Striche nach $x/a$, $a$ ist der Zylinderradius, $\mu$ die Masse je Flächeneinheit, $\delta$ die Schalenstärke, $D = E\,\delta/(1-\nu^2)$ und $k = \dfrac{\delta^2}{12\,a^2}$.

Die allgemeine Lösung der Gleichungen heißt:

$$u = A\,e^{\lambda x/a}\cos m\varphi\,\sin\omega t, \quad v = B\,e^{\lambda x/a}\sin m\varphi\,\sin\omega t, \quad w = C\,e^{\lambda x/a}\cos m\varphi\,\sin\omega t.$$

Setzt man sie ein, so erhält man drei lineare Gleichungen für $A$, $B$, $C$. Sie sind homogen, bestimmen daher nur das Verhältnis $A:B:C$ und auch das nur dann, wenn ihre Determinante verschwindet. Das gibt eine Beziehung zwischen $\lambda$, $m$ und $\omega$. Wir wollen sie als eine Gleichung für $\lambda$ bei gegebenem oder angenommenem $m$ und $\omega$ auffassen. Dann liefert sie acht verschiedene $\lambda$, also acht Elementarlösungen, zu denen acht unabhängige Konstante $A_1$ bis $A_8$ und die von ihnen abhängigen $B$ und $C$ gehören. Zu ihrer Bestimmung dienen acht Randbedingungen, vier für jeden Zylinderrand. Auch das sind homogene Gleichungen, und das Verschwinden ihrer Determinante liefert eine Gleichung, die außer diesen $\lambda$ die Abmessungen des Zylinders (Radius, Länge, Steifigkeit) enthält, und aus der man etwa die Zylinderlänge $l$ berechnen kann, wenn die andern gegeben sind. Die Gleichung ist in $l$ transzendent, hat also unendlich viele diskrete Lösungen. Die kleinste von ihnen ist die Länge des Zylinders, der mit $2\,m$ Knotengeraden und der Kreisfrequenz $\omega$ ohne Knotenkreis schwingt. Die andern Lösungen gehören zu Zylindern mit einer steigenden Anzahl solcher Kreise.

Wegen der Schwierigkeit, die mit der Anwendung einer solchen Lösung auf praktische Aufgaben verbunden ist, lohnt es sich, eine spezielle Lösung näher zu untersuchen, die nur für besondere Randbedingungen gilt:

$$u = A\cos m\varphi\cos\lambda\frac{x}{a}\sin\omega t, \quad v = B\sin m\varphi\sin\lambda\frac{x}{a}\sin\omega t, \quad w = C\cos m\varphi\sin\lambda\frac{x}{a}\sin\omega t.$$

Das $\lambda$ dieses Ansatzes ist nicht dasselbe wie das vorher gebrauchte. Für $x = 0$ verschwinden $v$, $w$, $u'$ und $w''$, also auch Längskraft und Einspannmoment, dagegen nicht $u$. Der Zylinder ist also an diesem Ende durch einen Boden auszusteifen, dessen Dehnungssteifigkeit unendlich, dessen Biegungssteifigkeit aber null ist. Wählt man $\lambda$ so, daß $\lambda\dfrac{l}{a} = n\pi$ ist mit ganzzahligem $n$, so werden am andern Zylinderende $x = l$ dieselben einfachen Randbedingungen erfüllt.

Setzt man den Ansatz in die Differentialgleichungen ein, so erhält man wieder drei lineare Gleichungen für die Amplituden, und das Verschwinden ihrer Determinante gibt eine Gleichung 3. Grades für $\omega^2$, die man in der Form schreiben kann

$$f(\omega^2) = a_3\,\omega^6 + a_2\,\omega^4 + a_1\,\omega^2 + a_0 = 0\,.$$

Die linke Seite als Funktion von $\omega^2$ zeigt Abb. 1 für ein Zahlenbeispiel ($k = 10^{-5}$, $\mu\,a^2/D = 3\cdot 10^{-6}\,\mathrm{sec}^2$, $\nu = 1/6$, $\lambda = 0{,}631$, $m = 4$).

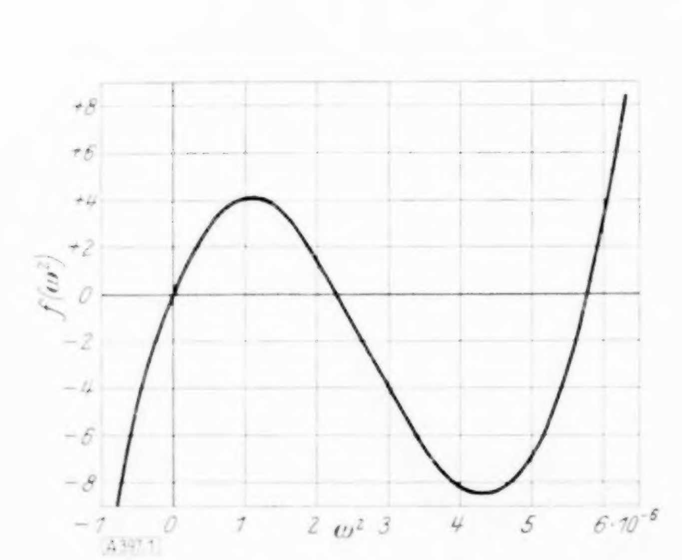


Abb. 1. Bestimmung der Eigenfrequenzen.

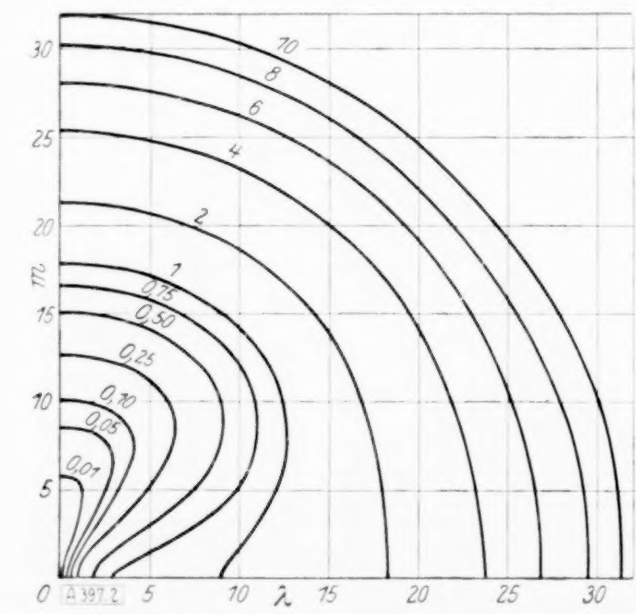


Abb. 2. Werte $\mu\,a^2\,\omega^2/D$ als Funktion von $\lambda$ und $m$ für $k = 10^{-5}$.

Die Kurve geht nicht durch den Ursprung, sondern sehr nahe rechts daran vorbei. Ihre Nullstellen liefern die drei Eigentöne, die zu $2m$ Knotengeraden und $n-1$ Knotenkreisen gehören. Sie sind von sehr verschiedener Größenordnung. Wenn man die zugehörigen Amplituden der drei Verschiebungskomponenten berechnet, so sieht man, daß die langsame eine ausgesprochene Transversalschwingung ist, während die beiden andern Longitudinalschwingungen sind.

Im allgemeinen wird, wie auch das Zahlenbeispiel zeigt, vor allem die Transversalschwingung in die Nähe technischer Erregerfrequenzen fallen. Wenn man sich auf ihre Berechnung beschränkt, kann man die kubische Parabel der Abb. 1 durch ihre Ursprungstangente ersetzen, also die Frequenzgleichung linearisieren. Die Ausrechnung der Eigenfrequenz wird dann sehr einfach. Die Dimensionslose $\frac{\mu a^2}{D}\omega^2$ ist außer von $\lambda$ und $m$ nur noch von dem Verhältnis $\delta/a$ der Schalenstärke zum Radius abhängig. Das Ergebnis für $k = 10^{-5}$ zeigt Abb. 2. Wesentlich für die Anwendung ist die Tatsache, daß jede Kurve rechts eine vertikale Tangente hat, die sie nicht überschreitet. Ist die Schale so kurz, daß das kleinste mögliche $\lambda$, also $\lambda_{\min} = \pi\frac{a}{l}$, größer ist als die Abszisse dieses äußersten rechten Punktes einer $\omega$-Kurve, so kann die Schale mit dieser Frequenz bestimmt nicht schwingen. Ist dagegen $\lambda_{\min}$ kleiner, so muß man untersuchen, ob die zur interessierenden Erregerfrequenz gehörende Kurve keinen der Punkte $n\lambda_{\min}$, $m$ mit ganzzahligen $n$ und $m$ trifft oder in seine Nähe kommt, eine Bedingung, die dann unter Umständen schwer erfüllbar sein kann. 397, 3

## 4. Zur Theorie der zähplastischen Stoffe.

Von *Hans Fromm* in Berlin.

Man ist schon lange zu der Auffassung gekommen, daß viele der scheinbar festen Stoffe Flüssigkeiten von so hoher Zähigkeit sind, daß sie auch bei beträchtlicher Belastung unmerklich langsam fließen. Für eine Reihe von Stoffen, z. B. die Metalle, ist die Frage noch nicht restlos beantwortet, ob sie wirklich Flüssigkeiten sind oder ob sie erst mit Erreichen einer von Null verschiedenen Fließgrenze in den Fließzustand kommen, d. h. plastisch werden. In der Theorie der Plastizität geht man von der letzten Annahme aus und fügt ihr gewöhnlich als Fließbedingung die einschränkende Voraussetzung hinzu, daß die Spannungen auch während des Fließens an der Fließgrenze bleiben. Die folgenden Ausführungen sollen zeigen, wann diese mathematische Vereinfachung anwendbar ist und wie im Bedarfsfalle eine Erweiterung möglich ist, welche die wichtigsten Züge des wirklichen Vorganges richtig berücksichtigt.

### 1. Grundzüge.

**Der zähplastische Stoff.** Die wesentlichen Gedankengänge seien zunächst in dem einfachen Beispiel der Zugbelastung eines Drahtes erläutert. Die Darstellung der Spannung $\sigma$ über der Dehnung $\varepsilon$ eines Versuches mit konstanter Dehnungsgeschwindigkeit $\dot{\varepsilon}$ ist bekannt (Abb. 1). Man erhält eine Schar von Kurven $\dot{\varepsilon} =$ konst, und es sei zunächst vorausgesetzt, es gäbe eine untere Grenzkurve $\dot{\varepsilon} = 0$ von der Form $\sigma_g(\varepsilon)$, unterhalb deren der Stoff nur elastisch ist, oberhalb deren er plastisch fließt. Diese ist die Kurve der Fließgrenze (Plastizitätsgrenze); existiert eine solche, so heißt der Stoff „plastisch“. Der Anstieg der Grenzkurve mit $\varepsilon$ heißt „Verfestigung“.

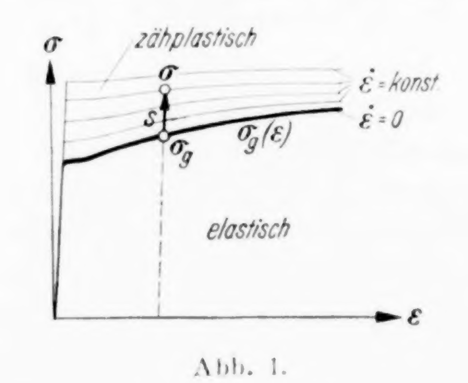


Abb. 1.

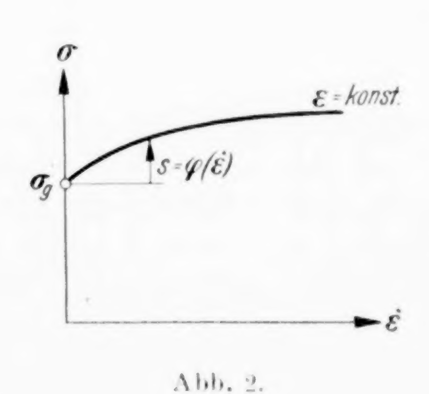


Abb. 2.

Die Eigenschaft eines Stoffes, noch nicht an der Grenze ($\dot{\varepsilon} = 0$), sondern erst mit deren Überschreitung zu fließen, soll seine „Zähigkeit“ heißen. Als Maß der Grenzüberschreitung diene die „Überspannung“ $s = \sigma - \sigma_g(\varepsilon)$. Von dieser hängt die Fließgeschwindigkeit ab. So ergibt sich für zähplastische Stoffe die Formulierung (Abb. 2):

Grenzbedingung: $\sigma = \sigma_g(\varepsilon)$ oder $s = 0$,

Fließbedingung: $\sigma > \sigma_g(\varepsilon)$ oder $s > 0$,

Fließgesetz: $s = \varphi_\varepsilon(\dot\varepsilon)$ $\lim\limits_{\dot\varepsilon \to 0} s = 0$.

**Ausartungen.** Aus den Gesetzen des zähplastischen Stoffes lassen sich einige Sonderfälle entwickeln:

Eine erste Ausartung ergibt sich mit dem Fließgesetz $s = 0$ für jedes $\dot\varepsilon$. Indem hier die Fließbedingung die Form der Grenzbedingung annimmt, verschwindet die Zähigkeit, und es liegt der gewöhnlich behandelte Fall des „idealplastischen" Stoffes vor.

Mit $\sigma_g(\varepsilon) =$ konst besitzt der Stoff keine Verfestigung. Insbesondere führt $\sigma_g(\varepsilon) = 0$ auf eine zweite Ausartung, bei der die Fließbedingung auch bei beliebig kleiner Spannung $\sigma$ schon erfüllt ist, d. h. der Stoff ist nicht mehr plastisch, sondern (zäh)„flüssig".

Beide Ausartungen treffen beim „idealflüssigen" Stoff gleichzeitig zu und liefern $\sigma = 0$ für jedes $\dot\varepsilon$.

Der Zusammenhang wird durch folgendes Schema verdeutlicht:

| | | Fließbedingung | |
|---|---|---|---|
| | | $s = 0$ (ideal) | $s > 0$ (zäh) |
| Grenzbedingung . . . . | $\sigma_g = 0$ (flüssig) | ideal-flüssig | zäh-flüssig |
| | $\sigma_g > 0$ (plastisch) | ideal-plastisch | zäh-plastisch |

**Fließbasis.** Die Grenzspannung $\sigma_g$ folgt durch Extrapolation nach $\dot\varepsilon = 0$ aus Versuchen über das Fließgesetz (Abb. 2). Die Form des Fließgesetzes läßt aber häufig keine sichere Extrapolation zu, so daß eine Unsicherheit bleibt, ob der Stoff zähplastisch oder zähflüssig ist. Dieser Fall liegt z. B. bei Metallen, wie Eisen, Kupfer u. a. vor (Abb. 3).

Die Kenntnis des Gebietes kleiner Geschwindigkeiten kann jedoch entbehrt werden, wenn ein Interesse nur für einen bestimmten Bereich ($\dot\varepsilon_1 \leq \dot\varepsilon \leq \dot\varepsilon_2$) der Geschwindigkeiten und der zugehörigen Spannungen $\sigma$ vorliegt.

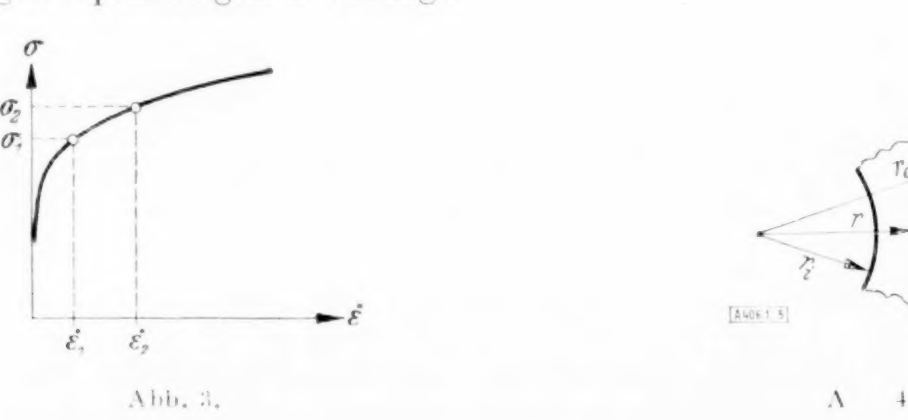



Abb. 3. Abb. 4.

Um ein treffendes Beispiel hierfür geben zu können, sei vorweggenommen, daß sich die Überlegungen auf beliebige Beanspruchungsarten anwenden lassen. Handelt es sich nun z. B. um einen zylindrischen Ring, der durch Innendruck bei ebener Formänderung aufgeweitet werden soll (Abb. 4), so ist bei der Radialgeschwindigkeit $u = K/r$ an der Stelle $r$ die Dehngeschwindigkeit $\dot\varepsilon = K/r^2$, nimmt also nach außen ab. Der Interessenbereich ist daher durch $\frac{\dot\varepsilon_2}{\dot\varepsilon_1} = \frac{\dot\varepsilon_i}{\dot\varepsilon_a} = \left(\frac{r_a}{r_i}\right)^2$ und $\dot\varepsilon_1 = \dot\varepsilon_a = \frac{u_a}{r_a}$ festgelegt. Aus $r_a = 2\,r_i$ folgt z. B. $\dot\varepsilon_2 = 4\,\dot\varepsilon_1$.

Ist ein Interessenbereich gegeben, so kann für diesen die zu einem beliebigen $\dot\varepsilon_b$ gehörige Spannung $\sigma_b$ wie eine Grenzspannung behandelt werden und man kann, gleichgültig ob der Stoff zähplastisch oder zähflüssig ist, eine Überspannung $s = \sigma - \sigma_b$ und ein Fließgesetz $s = \varphi_b(\dot\varepsilon)$ einführen. An Stelle der Grenzspannung tritt also eine durch $\dot\varepsilon_b$ signierte „Fließbasis" $\sigma_b(\dot\varepsilon_b)$, von der aus der Fließvorgang für den Interessenbereich beschrieben wird. Dabei entfällt natürlich die Fließbedingung $s > 0$ als nicht notwendig.

Dieses Vorgehen bietet verschiedene Vorteile: Zunächst kann man so rechnen, als ob $\sigma_b$ eine Fließgrenze wäre, ohne über die Existenz einer Grenze etwas zu wissen. Ferner kann man das Fließgesetz durch um so einfachere Ausdrücke annähern, je kleiner der Interessenbereich ist, besonders wenn die Signierung $\dot\varepsilon_b$ im Bereich liegt. So wird man oft mit der linearen Näherung $s = \sigma - \sigma_b = c(\dot\varepsilon - \dot\varepsilon_b)$ auskommen, auch wenn der Gesamtverlauf des Gesetzes von der linearen Form erheblich abweicht. Bei hinreichender Kleinheit des Bereiches wird man $s = 0$, d. h. $\sigma = \sigma_b =$ konst setzen dürfen, als ob der Stoff idealplastisch

wäre. Das wirkliche Fließgesetz findet dabei insofern Berücksichtigung, als die Basisspannung $\sigma_b$ von der Signierung $\dot{\varepsilon}_b$, d. h. von der Lage des Interessenbereiches abhängt; $\sigma_b$ wird z. B. um so höher liegen, je größer in obigem Beispiel die Außengeschwindigkeit $u_a$ sein soll. So kann u. U. eine zähe Flüssigkeit zweckmäßig nach der Theorie der idealplastischen Stoffe behandelt werden.

Die Annäherung durch die idealplastische Form hat besonderes Interesse, da hierfür eine Reihe von Lösungen vorliegen. Zu ihrer Kritik sei ein Beispiel einer Fehlerrechnung durchgeführt. Für ein geglühtes Flußeisen gilt mit Ausnahme vernachlässigbar kleiner Geschwindigkeiten ein Fließgesetz von der Form $s = \sigma - \sigma_b = C \log (\dot{\varepsilon}/\dot{\varepsilon}_b)$, worin $C = 175\ \mathrm{kg/cm^2}$ ist. Mit $\dot{\varepsilon}_b = \dot{\varepsilon}_1$ ist also die größte Überspannung im Bereiche $s_2 = \sigma_2 - \sigma_b = C \log (\dot{\varepsilon}_2/\dot{\varepsilon}_1)$, für das Beispiel $\dot{\varepsilon}_2 = 4\,\dot{\varepsilon}_1$ würde daher der Fehler $s_2 = 105\ \mathrm{kg/cm^2}$. Der relative Fehler $f = s_2/\sigma_b$ hängt von der Lage des Bereiches ab, und zwar nimmt er mit wachsender Radialgeschwindigkeit ab; für $\dot{\varepsilon}_b = 10^{-5} = 10^{-3}\,\%\ \mathrm{sek}^{-1}$ ist bei obigem Eisen $\sigma_b = 2740\ \mathrm{kg/cm^2}$, also $f \approx 4\,\%$. Bei großen Interessenbereichen unter kleinen Geschwindigkeiten kann also für Eisen die idealplastische Näherung zu merklichen Fehlern führen.

## 2. Tensorielle Fassung.

Die Erweiterung der für einfache Zugbeanspruchung dargestellten Methode auf beliebige Beanspruchungsarten erfordert die Aufstellung von Beziehungen zwischen dem Tensor $\mathfrak{P}$ des Spannungszustandes und dem Tensor $\mathfrak{D}$ des Verzerrungszustandes bzw. dem Tensor $\dot{\mathfrak{D}}$ der Verzerrungsgeschwindigkeiten.

**Tensoranalyse.** Eine besonders übersichtliche Darstellung ergibt sich hierfür durch eine geeignete Tensoranalyse: Man kann jeden Tensor als einen Vektor mit 9 Komponenten auffassen und durch dessen Länge und Richtung kennzeichnen; die Länge ist ein Maß der Tensor„intensität“, der gleichgerichtete Einheitsvektor bestimmt die „Art“ des Tensors. Durch Vereinigung mit der bekannten Aufspaltung in Kugeltensor und Deviator folgt z. B. für den Spannungstensor

$$\mathfrak{P} = \sigma_m \cdot \mathfrak{E} + \mathfrak{P}_0 \quad \text{mit} \quad \mathfrak{P}_0 = P_0 \cdot \mathfrak{A}(\mathfrak{P}_0),$$

worin $\sigma_m$ die „hydrostatische“ Spannung, $\mathfrak{E}$ der Einheitstensor, $P_0$ die Intensität des Deviators $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{A}(\mathfrak{P}_0)$ die Deviatorart ist.

Abb. 5.

**Fließgrenze und Überspannungstensor.** Existiert eine Fließgrenze, so bestimmen die Vektoren aller Spannungszustände an der Fließgrenze eine Fläche (Abb. 5); deren Gleichung $\Phi(\mathfrak{P}) = 0$ ist die Grenzbedingung, welche an Stelle von $s = 0$ tritt. Jedem Punkt der Grenzkurve in Abb. 1 entspricht eine solche Grenzfläche, d. h. die Grenzfläche verschiebt sich mit fortschreitender Verfestigung. Innerhalb der Grenzfläche $\Phi = 0$ liegen nun die Zustände des elastischen, außerhalb die des zähplastischen Verhaltens. Man kann die Funktion $\Phi(\mathfrak{P})$ so normieren, daß die Fließbedingung die Form $\Phi(\mathfrak{P}) > 0$ annimmt; $\Phi(\mathfrak{P})$ heiße dann „Fließfunktion“.

An die Stelle der Überspannung $s$ muß ein Überspannungstensor $\mathfrak{S}$ treten. Dieser sei in Anlehnung an die Vorstellung, daß er bei fehlender Vorgeschichte durch das Lot auf der Grenzfläche zum herrschenden Spannungszustand $\mathfrak{P}$ bestimmt ist (Abb. 5), definiert durch $\mathfrak{S} = \Phi/G \cdot \mathfrak{A}(\mathfrak{G})$, worin $\mathfrak{G} = \mathrm{grad}_{\mathfrak{P}}\, \Phi$ der neundimensionale Gradient der Fließfunktion $\Phi$ an der Stelle $\mathfrak{P}$ ist.

**Zwei-Tensor-Gesetze bei Isotropie.** Soweit Beziehungen zwischen nur zwei Tensoren in isotropen Stoffen in Betracht kommen, können diese durch die Gleichheit der Deviatorenarten und zwei skalare Gleichungen zwischen den Intensitäten zum Ausdruck gebracht werden. So ergibt sich folgende Zusammenstellung:

| | Verhalten elastisch | zähflüssig | zähplastisch | |
|---|---|---|---|---|
| Artgleichung . . | $\mathfrak{A}(\mathfrak{D}_0) = \mathfrak{A}(\mathfrak{P}_0)$ | $\mathfrak{A}(\dot{\mathfrak{D}}_0) = \mathfrak{A}(\mathfrak{P}_0)$ | $\mathfrak{A}(\dot{\mathfrak{D}}_0) = \mathfrak{A}(\mathfrak{S}_0)$ | $\Phi(\mathfrak{P}) > 0.$ |
| Intensitätengleichungen | $D_0 = \chi_e(P_0, \sigma_m)$ | $\dot{D}_0 = \chi_f(P_0, \sigma_m)$ | $\dot{D}_0 = \chi_p(S_0, s_m)$ | |
| | $\varepsilon_m = \psi_e(P_0, \sigma_m)$ | $\dot{\varepsilon}_m = \psi_f(P_0, \sigma_m)$ | $\dot{\varepsilon}_m = \psi_p(S_0, s_m)$ | |

Gilt bei zähplastischem Verhalten insbesondere als Fließfunktion $\Phi(\mathfrak{P}) = \frac{1}{2} P_0^2 - k^2$, worin $k$ eine mit der Verfestigung veränderliche Kenngröße des Stoffes ist, so folgt aus der rechten Spalte

$$\mathfrak{A}(\dot{\mathfrak{D}}_0) = \mathfrak{A}(\mathfrak{P}_0); \qquad \dot{D}_0 = \varphi_0(P_0); \qquad \dot{\varepsilon}_m = \varphi_m(P_0); \qquad P_0 > k\sqrt{2}.$$

Diese Form entspricht der bisher üblichen Angabe von Fließgesetzen des plastischen Zustandes; sie verrät nur noch durch die Fließbedingung $P_0 > k\sqrt{2}$, daß es sich nicht um eine zähe Flüssigkeit, sondern um einen zähplastischen Stoff handelt.

**Signierung und Fließbasis.** Bei Stoffen mit nicht markanter Fließgrenze ist nun wieder die Signierung einer Fließbasis von Vorteil. An Stelle einer signierenden Größe $\dot{\varepsilon}_b$ muß jetzt eine Signierungsbedingung $\Sigma(\dot{\mathfrak{D}}_b) = 0$ treten, welche Signierungstensoren $\dot{\mathfrak{D}}_b$ festsetzt, die für die verschiedenen Formänderungsarten gleichwertig sind, d. h. deren zugehörige Spannungen $\mathfrak{P}_b$ die Fließbasis bilden sollen. Die Fließfunktion, aus der der Überspannungstensor $\mathfrak{S}$ nach obiger Definition zu bilden ist, muß also die Basisbedingung $\Phi_b(\mathfrak{P}_b) = 0$ erfüllen. Daraus folgt, daß die Signierungsbedingung $\dot{D}_{0b} = \Delta = \text{konst}$; $\dot{\varepsilon}_{mb} = E = \text{konst}$ lauten muß, wenn die angegebenen Intensitätengleichungen des zähplastischen Fließens gelten sollen.

Die Form der Intensitätengleichungen ist bei gegebener Fließfunktion durch das Fließgesetz für Zug unter Annahme unveränderlichen Volumens bestimmt. Für die obigen Beispiele folgt: $P_0 - P_{0b} = C\sqrt{\frac{2}{3}} \log\left(\frac{\dot{D}_0}{\Delta}\right)$; $\dot{\varepsilon}_m = 0$ mit $P_{0b} = k_b \cdot \sqrt{2} = \text{konst}$ als Basisbedingung.

Die eingehende Begründung der hier vorgetragenen Ergebnisse, ihre Anwendung und die Einbeziehung der elastischen Formänderungen und der Vorgeschichte (Verfestigung usw.) ist an anderer Stelle veröffentlicht[1]. 406, 4

## 5. Die Bedingungen, unter denen statistische Prozesse zu universellen Verteilungsgesetzen führen.

Von *Hans Gebelein* in Göttingen.

Bei den Problemen der physikalischen Statistik hat man es mit solchen Systemen zu tun, die sich von den Systemen der klassischen Mechanik dadurch unterscheiden, daß aus dem Zustand in einem Zeitpunkt $t_0$ der Zustand im benachbarten Augenblick $t_1$ nicht mit Sicherheit folgt, sondern für den Übergang zum neuen Zustand Wahrscheinlichkeitsverteilungen bestehen. Es soll hier nicht untersucht werden, welche erkenntnistheoretischen Folgerungen die Annahme nach sich zieht, daß es solche Systeme in der Natur gibt. Hier handelt es sich allein um die mathematischen Folgerungen aus dem angenommenen Sachverhalt.

Das Hauptproblem eines solchen statistischen Systems von der Form einer sog. Markoffschen Kette ist nach v. Mises das folgende:

Es sei eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $w(y, t_0)$ gegeben, die aussagt, mit welcher Wahrscheinlichkeit das System zur Zeit $t_0$ im Zustand $y$, oder an der Stelle $y$ des Phasenraums anzutreffen ist. (Der Phasenraum kann beliebig viele Dimensionen $y_1 \ldots y_n$ besitzen.)

Weiter sei die Dichte der Übergangswahrscheinlichkeiten bekannt, $v(x, y; \Delta t)$, die angeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit das System in der Zeit $\Delta t$ von der Stelle $x$ zur Stelle $y$ des Phasenraums gelangt.

Die Frage lautet dann: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $w(y, t)$ dafür, daß zur späteren Zeit $t$ das System sich an der Stelle $y$ des Phasenraums befindet?

Es ist leicht einzusehen, daß das betrachtete statistische System zu einem System der klassischen Mechanik wird, wenn die Übergangswahrscheinlichkeiten in der Weise ausarten, daß bei endlichem $\Delta t$ ihre Streuungen verschwinden, oder, etwas allgemeiner, wenn die Streuungen mit abnehmendem Zeitintervall stärker gegen null gehen als dieses Zeitintervall selbst. So wird durch allmählich abnehmende Streuungen ein stetiger Übergang von statistischen zu deterministischen Prozessen bewirkt.

Die oben gestellte Hauptaufgabe wurde durch v. Mises gelöst, indem er in Hinblick auf die Verhältnisse in der Atommechanik für das System eine nichtkontinuierliche und endliche Menge von Zuständen zuließ und an Stelle der kontinuierlichen Zeit für die Rechnung untereinander gleiche, endliche Zeitintervalle verwendete. So erhielt v. Mises als mathematisches Hilfsmittel zur Lösung des Problems ein System linearer algebraischer Gleichungen.

[1] H. Fromm, Ingenieur-Archiv IV. Bd., 1933, S. 432—466.

Sein Hauptergebnis ist dieses, daß unter bestimmten Voraussetzungen für die Übergangswahrscheinlichkeiten die Verteilung nach sehr vielen Zeitintervallen von der Anfangsverteilung unabhängig wird, und daß diese universelle Verteilung, gegen die das System unter allen Umständen strebt, im Falle symmetrischer Übergangswahrscheinlichkeiten ($v(x, y; \Delta t) = v(y, x; \Delta t)$) Gleichwahrscheinlichkeit ist.

Wir nennen eine solche Verteilung, gegen die das System unabhängig von der speziellen Anfangsverteilung $w(y, t_0)$ strebt, die ergodische Verteilung $W(y)$ des betreffenden statistischen Systems, und nennen ein statistisches System, das eine ergodische Verteilung besitzt, ein ergodisches System.

Da es mir besonders um solche Systeme zu tun war, deren Verhalten recht nahe der Grenze zwischen deterministischem und statistischem Charakter liegt, und von denen man unter Umständen von Anfang an gar nicht weiß, ob sie zur einen oder anderen Klasse gehören, wie z. B. das System einer turbulent fließenden Flüssigkeit, so war es notwendig, mit kontinuierlichem Phasenraum und stetiger Zeit zu rechnen. Den Weg für die erforderliche Untersuchung hat der Russe Kolmogoroff gezeigt, der unter Verwendung kontinuierlicher Zeit, bei endlicher Zahl von diskreten Merkmalen zu einem System gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen, bei Zugrundelegung eines stetigen Phasenraums aber zu einer parabolischen Differentialgleichung gelangte. Diese Kolmogoroffsche Gleichung hat die Gestalt

$$\frac{\partial w}{\partial t} = L(w),$$

wo $L(w)$ ein linearer Differentialausdruck zweiter Ordnung mit partiellen Ableitungen nach den Koordinaten des Phasenraums $y$, bzw. im mehrdimensionalen Fall $y_1 \ldots y_n$ ist. Diese Gleichung ist für das Anfangsproblem $w(y, t_0) = w_0(y)$ zu lösen.

Die Koeffizienten von $L(w)$ hängen eng zusammen mit den Erwartungswerten und Streuungen der Übergangswahrscheinlichkeiten, die mit abnehmendem Zeitintervall $\Delta t$ wie dieses gegen null gehen müssen. Setzt man

$$a_i(y_1 \ldots y_n) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot \text{Erwartungswert von } v(x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_n; \Delta t)$$

und

$$b_{ik}(y_1 \ldots y_n) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2\,\Delta t} \cdot \text{Streuung von } v(x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_n; \Delta t),$$

so daß die Funktionen $a_i$ im $n$-dimensionalen Fall ein Vektorfeld, die Funktionen $b_{ik}$ aber ein Tensorfeld im Phasenraum festlegen, so wird explizite:

$$L(w) = -\sum_i \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_i w - \sum_k \frac{\partial}{\partial y_k}(b_{ik} w)\right).$$

Stellt man nun die Frage, was symmetrische Übergangswahrscheinlichkeiten für diese Kolmogoroffsche Gleichung bedeuten, so läßt sich beweisen, daß unter der Voraussetzung nirgends im Phasenraum verschwindender Streuungsdeterminante

$$D(y_1 \ldots y_n) = |b_{ik}| \neq 0$$

der folgende, den v. Misesschen Ergebnissen entsprechende Sachverhalt gilt:

**Satz 1:** Symmetrie der Übergangswahrscheinlichkeiten, Selbstadjungiertheit des Differentialausdrucks $L(w)$ der Kolmogoroffschen Gleichung und Gleichwahrscheinlichkeit als ergodische Lösung sind drei Vorkommnisse, die sich gegenseitig notwendig bedingen.

Die wichtigste weitere Frage ist nun die nach der ergodischen Lösung im Falle unsymmetrischer Übergangswahrscheinlichkeiten. Darüber gibt der folgende Satz Auskunft:

**Satz 2:** Damit bei unsymmetrischen Übergangswahrscheinlichkeiten eine ergodische Verteilung existiert, sind im $n$-dimensionalen Fall $n - 1$ Integrabilitätsbedingungen zu erfüllen. Erwartungswerte und Streuungen der Übergangswahrscheinlichkeiten dürfen daher nicht ganz beliebig gewählt werden.

Diese Integrabilitätsbedingungen lassen sich in einfacher Weise so deuten, daß es bei vorausgesetzter Existenz einer ergodischen Lösung möglich sein muß, durch geeignete Transformation zu einem neuen Phasenraum zu gelangen, in dem die ergodische Lösung Gleichwahrscheinlichkeit ist und daher die Verhältnisse des Satzes 1 vorliegen. Über die explizite Berechnung jener ergodischen Lösung ist zu sagen:

**Satz 3:** Die explizite Berechnung der ergodischen Verteilung aus Erwartungswerten und Streuungen ist möglich ohne Integration der Kolmogoroffschen Differentialgleichung.

Durch diese Sätze und die in ihnen ausgedrückte mögliche Existenz einer ergodischen Lösung sind die statistischen Prozesse im Gegensatz zu den deterministischen Prozessen ausgezeichnet. Nur bei den statistischen Prozessen mit nicht verschwindenden Streuungen der Übergangswahrscheinlichkeiten gibt es universelle Verteilungen, die ergodisch, d. h. von den Anfangsverteilungen unabhängig sind. Eine solche Eigenschaft kommt den deterministischen Prozessen nicht zu. Mit verschwindenden Funktionen $b_{ik}$ reduziert sich nämlich die Kolmogoroffsche parabolische Differentialgleichung auf eine Gleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial w}{\partial t} = M(w) = -\sum_i \frac{\partial}{\partial y_i}(a_i w),$$

und diese besitzt zwar stationäre Lösungen, aber keine Lösung, die von den Ausgangsverteilungen unabhängig ist. $M(w)$ kann als Differentialausdruck erster Ordnung nicht selbstadjungiert sein, und wenn in $L(w)$ unter Beibehaltung der Selbstadjungiertheit die $b_{ik}$ gegen null streben sollen, dann müssen notwendig die $a_i$ ebenfalls gegen null gehen, d. h. im Phasenraum verschwinden mit den Streuungen auch die Erwartungswerte der Geschwindigkeiten und das System „gefriert ein".

Bei der früher üblichen Begründung der statistischen Mechanik wurde versucht, zu beweisen, daß die stationäre Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial w}{\partial t} = M(w)$$

die bei langer Beobachtungszeit festzustellende Wahrscheinlichkeitsverteilung darstellt und die für die physikalischen Folgerungen erforderliche universelle Verteilung ist. Zu diesem Beweis wurde die vielumstrittene Ergodenhypothese herangezogen. Es läßt sich jedoch zeigen, daß jene stationäre Lösung nichts mit der wirklichen ergodischen Verteilung, von denen die Sätze 1 bis 3 handeln, zu tun hat, und daß die ergodische Verteilung $W(y)$ bei verschwindenden Streuungen nicht in jene Verteilung übergeht. Damit wird das Ergebnis erhalten:

**Satz 4:** Es gibt keine statistischen Prozesse, für die die Streuungen nicht entscheidend wären. Verschwinden die Streuungen, dann müssen, falls das System ergodisch bleiben soll, auch die Erwartungswerte mit verschwinden, d. h. das System gefriert ein.

**Satz 5:** Die ergodische Lösung konvergiert bei verschwindenden Streuungen nicht gegen jene stationäre Lösung, die man aus den Gleichungen des deterministischen Systems berechnen kann. Wenn auf Grund der Ergodenhypothese der Beweis versucht wird, daß jene Lösung die ergodische Grenzlösung sei, dann ist demnach die Ergodenhypothese nicht nur unzulänglich, sondern unzutreffend.

Physikalisch bedeuten die Größen $a_i$ ein Geschwindigkeitsfeld im Phasenraum. Da bei verschwindenden Streuungstensoren dieses Feld mit dem Feld der deterministischen Geschwindigkeiten identisch ist, liegt es nahe, das allgemeine Prinzip aufzustellen, daß die deterministischen Geschwindigkeiten der Gleichungen der klassischen Mechanik die Erwartungswerte der Übergangswahrscheinlichkeiten sind, wenn immer man Gründe hat, das System als statistisch zu betrachten. Für die Streuungen der Übergangswahrscheinlichkeiten jedoch folgt aus den klassischen Bewegungsgleichungen unmittelbar nichts. Zu ihrer Bestimmung sind vielmehr neue physikalische Ideen unerläßlich, und dies bringt unter Umständen große Schwierigkeiten. Bisher hat in den bemerkenswertesten Fällen die physikalische Hypothese symmetrischer Übergangswahrscheinlichkeiten in einem bestimmten Phasenraum zu diesem Zwecke Verwendung gefunden, eine Hypothese, die ebenso wie jede andere erforderliche Hypothese über die Streuungen weit über die Aussagen der klassischen Bewegungsgleichungen hinausgeht. Der Sachverhalt ist also der folgende:

**Satz 6:** Zur Lösung eines Problems der physikalischen Statistik genügen nie die klassischen Bewegungsgleichungen, da aus ihnen nur die Erwartungswerte der Übergangswahrscheinlichkeit, nicht aber deren Streuungen folgen. Es ist in jedem Falle noch ein zweites physikalisches Prinzip erforderlich, das zur Berechnung der Streuungen führt oder diese Berechnung ersetzt, und in dieser Tatsache liegt die Schwierigkeit begründet, die die Probleme der statistischen Mechanik bieten, aber auch die Schönheit und der universelle Charakter der Ergebnisse. 398, 5

## 6. Turbulenzentstehung beim Wärmeübergang durch freie Konvektion an senkrechter Platte und waagerechtem Zylinder.

Von *R. Hermann* in Aachen.

An einer elektrisch geheizten senkrechten Platte (100 mal 100 cm²) und einem waagerechten Zylinder (58,5 cm Durchmesser, 100 cm Länge) wurden beim Wärmeübergang durch freie Konvektion die kritischen Stellen des Umschlages von laminarer zu turbulenter Strömung in Luft mittels der Schlierenmethode nach E. Schmidt bestimmt. Zeitaufnahmen mittels Linse und Kamera lieferten den zeitlichen Mittelwert der Umschlagstelle, Momentaufnahmen direkt auf die photographische Platte in natürlicher Größe zeigten die momentane Umschlagstelle. Mit Hilfe der für die senkrechte Platte von E. Schmidt und E. Pohlhausen sowie für den waagerechten Zylinder vom Verfasser gegebenen theoretischen Lösung für das Geschwindigkeits- und Temperaturfeld wurde aus den beobachteten kritischen Stellen die kritische Reynoldssche Zahl der Grenzschicht berechnet. Sie ergab sich im Mittel für die senkrechte Platte zu 303, für den waagerechten Zylinder zu 285, also praktisch einander gleich. Hieraus wurde die Wanderung des kritischen Azimutes am Zylinder mit der Grashofschen Zahl berechnet.

Die theoretische Bedeutung des Ergebnisses ist die, daß hiermit, m. W. erstmalig, die kritische Reynoldssche Zahl eines Geschwindigkeitsprofiles mit Maximum und Wendepunkt bestimmt ist. Für die Praxis ergibt sich hieraus die obere Grenze der Anwendbarkeit der laminaren Wärmeübergangsformeln in Luft, nämlich Grashofsche Zahl $= 1{,}0 \cdot 10^9$ für die senkrechte Platte und Grashofsche Zahl $= 3{,}5 \cdot 10^8$ für den waagerechten Zylinder. 400, 6

## 7. Über die graphische Darstellung zugeordneter Spannungs- und Verzerrungszustände.

Von *K. Klotter* in Karlsruhe.

Die Mohrschen Spannungskreise (Abb. 1) geben eine Übersicht über die auf verschiedene Achsen bezogenen Komponenten eines Spannungstensors. Diese Art der Darstellung ist nicht auf Spannungszustände beschränkt, auch ein Verzerrungszustand, kurz jeder Tensor kann auf dieselbe Weise abgebildet werden. Die Mohrschen Kreise stellen eine Abbildung für Tensoren dar.

In einem elastischen Körper ist einem Spannungstensor ein Verzerrungstensor eindeutig zugeordnet — und umgekehrt. Man kann nun fragen, wie aus dem Mohrschen Bild für einen gegebenen Spannungstensor das des zugehörigen Verzerrungstensors hervorgeht.

Die Verknüpfung zwischen den Komponenten des Spannungstensors und des Verzerrungstensors geben die Spannungs-Dehnungs-Gleichungen an. Sie lauten:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2\,G\left[\varepsilon_x + \frac{1}{m-2}\,e\right] & \tau_{xy} &= 2\,G\,\frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \sigma_y &= 2\,G\left[\varepsilon_y + \frac{1}{m-2}\,e\right] & \tau_{yz} &= 2\,G\,\frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \sigma_z &= 2\,G\left[\varepsilon_z + \frac{1}{m-2}\,e\right] & \tau_{zx} &= 2\,G\,\frac{\gamma_{zx}}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (1).$$

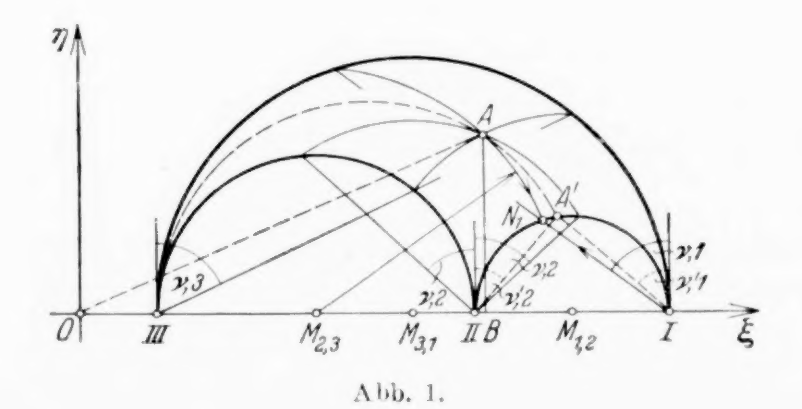



Abb. 1.

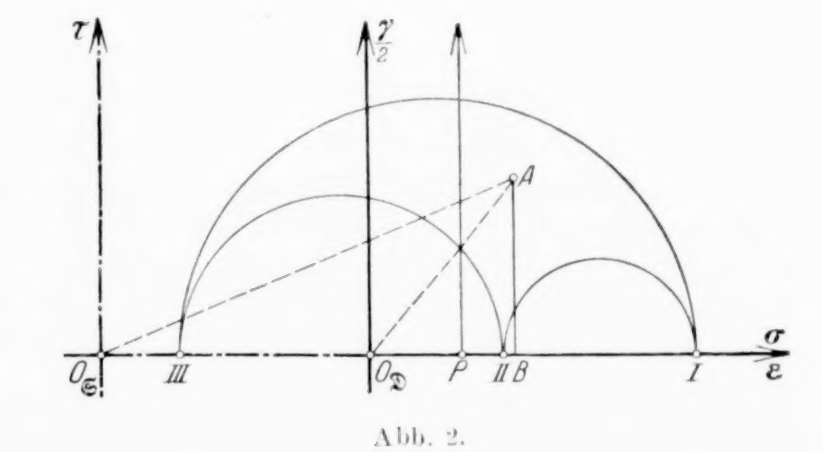



Abb. 2.

Einen besseren Einblick in den Zusammenhang der beiden Tensoren erhält man, wenn man nicht die Komponenten der Tensoren selbst betrachtet, sondern sowohl den Spannungstensor wie den Verzerrungstensor in zwei Bestandteile aufspaltet, in einen Kugeltensor (mit gleichen Hauptwerten) und einen Deviator (Summe der Hauptwerte gleich Null); diese Zerlegung kann stets eindeutig vorgenommen werden.

Aus den Gl. (1) erhält man so zwei Gleichungssysteme:

$$\sigma^{(0)} = 2\,G\,\frac{m+1}{m-2}\,\varepsilon^{(0)} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

und je drei Gleichungen vom Typ

$$\sigma_x'' = 2\,G\,\varepsilon_x'' \qquad \tau_{xy}'' = G\,\frac{\gamma_{xy}''}{2} \quad \ldots\ldots \quad (3),$$

die man in Tensorform

$$\mathfrak{S}^{(0)} = K_0\,\mathfrak{T}^{(0)} \quad \ldots \quad (4a), \qquad \mathfrak{S}'' = K_2\,\mathfrak{T}'' \quad \ldots\ldots \quad (4b)$$

schreiben kann. $^{(0)}$ bezeichnet den Kugeltensor und seine Komponenten, $''$ den Deviator und seine Komponenten. Man sieht, daß die beiden Bestandteile, in die man den Spannungstensor und den Verzerrungstensor aufgespalten hat, jeweils proportional sind: Der Spannungskugeltensor ist dem Verzerrungskugeltensor proportional mit dem Proportionsfaktor $K_0 = 2\,G\,\frac{m+1}{m-2}$ (Volummodul), der Spannungsdeviator ist dem Verzerrungsdeviator proportional mit dem Proportionsfaktor $K_2 = 2\,G$ (Gestaltmodul).

Diese Proportionalität kann man im Mohrschen Bild verwerten. Zunächst findet man das Bild des Spannungsdeviators durch Verschieben des Anfangspunktes $O_{\mathfrak{S}}$ (Abb. 2) nach $P$. $P$ ist der Schwerpunkt der Punkte I, II, III; er kann durch eine einfache geometrische Konstruktion gewonnen werden[1]). Dem Spannungsdeviator ist der Verzerrungsdeviator proportional. Das gleiche Bild, das den Spannungsdeviator darstellt, gibt in einem anderen Maßstabe den Verzerrungsdeviator an. War z. B. der Maßstab $l_{\mathfrak{S}}$ für die Spannungsgrößen so gewählt, daß

$$\sigma_1'' = l_{\mathfrak{S}}\,\overline{PI},$$

so ist

$$\varepsilon_1'' = l_{\mathfrak{T}}\,\overline{PI},$$

wenn der Maßstab $l_{\mathfrak{T}} = l_{\mathfrak{S}} / K_2$ benutzt wird.

Den gesamten Verzerrungstensor erhält man aus dem Deviator durch Addition des Kugeltensors, also Verschieben des Anfangspunktes von $P$ nach $O_{\mathfrak{T}}$, dabei ist

$$\frac{\overline{PO_{\mathfrak{T}}}}{\overline{PO_{\mathfrak{S}}}} = \frac{l_{\mathfrak{S}}\,\varepsilon^{(0)}}{l_{\mathfrak{T}}\,\sigma^{(0)}} = \frac{K_2}{K_0} = \frac{m-2}{m+1};$$

$O_{\mathfrak{T}}$ liegt daher stets zwischen $O_{\mathfrak{S}}$ und $P$.

Man sieht: Das gleiche geometrische Bild, das den Spannungstensor darstellt, gibt, wenn man einen zweiten Koordinatenanfangspunkt $O_{\mathfrak{T}}$ einträgt, auch den zugehörigen Verzerrungstensor an (Abb. 2).

Eine zweite Möglichkeit einer Abbildung bietet das Verfahren von R. Land. Dieses ist zunächst allerdings nur für Trägheitstensoren ausgebildet, deren Besonderheit darin besteht, daß ihre Hauptwerte stets positiv sind. Durch eine einfache Überlegung kann es jedoch für beliebige Tensoren hergerichtet werden. Auch in diesem Fall lassen sich die Bilder zugeordneter Spannungs- und Verzerrungszustände leicht angeben: man erhält konzentrische Kreise.

Die Verfahren sind überall da anwendbar, wo linerare Relationen zwischen Tensoren bestehen.

In einer vor kurzem an anderer Stelle erschienenen Arbeit sind die angedeuteten Überlegungen weiter ausgeführt und auch durch Beispiele erläutert[2]). 394, 7

[1]) Handbuch der Physik, Bd. 6, S. 434. Berlin 1928.
[2]) K. Klotter, Ing.-Arch. 4, 354, 1933.

# 8. Übertragung von Maschinenschwingungen auf Boden und Gebäude[1].

Von *R. Köhler* und *A. Ramspeck* in Göttingen.

Der Vortrag berichtet über Messungen des Geophysikalischen Instituts der Universität Göttingen, die in Zusammenarbeit mit der Deutschen Forschungsgesellschaft für Bodenmechanik (Technische Hochschule Berlin) in der Umgebung von Göttingen vorgenommen wurden. Die ausführliche Bearbeitung des gesamten Materials wird als gemeinsame Veröffentlichung der Deutschen Forschungsgesellschaft für Bodenmechanik und des Geophysikalischen Instituts Göttingen demnächst erscheinen. Hier soll nur über einen speziellen Teil der Arbeiten berichtet werden.

Die Untersuchungen fanden statt in: alluvialem Kies, Liaston, unterem Muschelkalk und mittlerem Buntsandstein. Sinusförmige Bodenbewegungen verschiedener Frequenz wurden durch eine Losenhausen-Schwingungsmaschine angeregt und mit vorher auf dem Schütteltisch geprüften Seismographen in 3 Komponenten in Abständen von 10 bis 140 m von der Maschine beobachtet.

Die Tourenzahl der Maschine wurde während einer Messung im Frequenzbereich 5 bis 50 Hertz stufenweise um Beträge von 0,5 bis 2 Hertz gesteigert. Wenn man die Amplituden der beobachteten Bodenbewegungen als Funktion der Frequenz aufträgt, so zeigt ein Maximum in der Kurve an, daß der Boden bei der entsprechenden Frequenz besonders stark schwingt.

Ein Teil dieser Maxima erwies sich als unabhängig von Änderungen in der Aufstellung der Maschine; sie zeigen also Eigenfrequenzen des Bodens an. Einen Beweis dafür, daß es sich hier tatsächlich um Eigenschwingungen des Bodens handelt, liefern Sprengungen. Diese erregten im Boden durch Stoß allmählich abklingende Eigenschwingungen, deren Frequenz mit der dieser Maxima genau übereinstimmt. Das Dämpfungsverhältnis der Bodenschwingungen betrug 1,01 : 1. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der durch die Maschine erzwungenen Schwingungen wurde im Liaston zu 300 m/sek gefunden. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen in den obersten Schichten ergab sich durch Sprengungen an dieser Stelle zu 750 m/sek.

Für die Übertragung von Maschinenschwingungen auf Gebäude sind die schwach gedämpften Eigenschwingungen des übertragenden Untergrundes von wesentlicher Bedeutung. Untersuchungen zu dieser Frage sind noch im Gange. 410, 8

# 9. Praktische Bestimmung von Oberflächen.

Von *H. König* in Clausthal.

Die Berechnung des Inhalts einer gekrümmten Fläche ist mathematisch verhältnismäßig unbequem. Die gewöhnlichen Methoden der Integralrechnung versagen in allen praktischen Fällen, da es nicht möglich ist, allgemein eine gegebene Fläche durch einen geschlossenen Ausdruck genügend genau darzustellen und gleichzeitig eine Funktion zu erhalten, die für die Integration genügend einfach ist.

Beschränkt man sich zunächst auf konvexe Oberflächen, so läßt sich aus einer solchen Fläche durch senkrechte Parallelprojektion ein in allen seinen inneren Punkten zweifach überdeckter Umriß herstellen. Projiziert man nun aus allen Richtungen des Raumes und bildet den Mittelwert aller Umrißinhalte, so erhält man einen mittleren Umrißinhalt, der in einfacher Beziehung zur Oberfläche steht. Nach einem wenig bekannten Satz, der bereits auf Cauchy zurückgeht, ist nämlich die Oberfläche eines konvexen Körpers gleich dem Vierfachen seines mittleren Umrißinhaltes.

Dieser Satz gilt in entsprechender Weise nicht nur für den dreidimensionalen Raum, sondern für alle Dimensionen. So ist z. B. der Umfang einer konvexen Kurve gleich dem $\pi$fachen ihrer mittleren Breite.

Praktisch wird der mittlere Umrißinhalt dadurch bestimmt, daß man aus allen Richtungen des Raumes eine bestimmte Anzahl herausgreift. Es kommt darauf an, diese Richtungen so zu verteilen, daß man aus möglichst wenigen einen möglichst guten Mittelwert erhält. Diese Aufgabe ist das zweidimensionale Analogon zu dem bekannten Integrationsverfahren von Gauß. Je nachdem, wie man den Umriß als Funktion der Richtung darstellt, erhält man verschiedene Möglichkeiten für die Auswahl. Entwickelt man den Umrißinhalt nach Kugelfunktionen, so erhält man beispielsweise durch Projektion in den sechs Richtungen der Ikosaederachsen eine Darstellung, die die Entwicklung bis zu Kugelfunktionen vierter Ordnung berücksichtigt.

[1]) Eine ausführliche Wiedergabe des Vortrags mit 6 Abb. erscheint gleichzeitig in der Zschr. f. techn. Physik.

An Stelle der senkrechten Parallelprojektion läßt man praktisch die Zentralprojektion, d. h. die Fotografie treten. Der Umriß wird dadurch vergrößert und hängt von dem Abstand zwischen Körper und Objektiv ab. Wählt man diesen Abstand größer als das Fünffache des größen Körperdurchmessers, so läßt sich der Fehler, der durch die Zentralprojektion hineingetragen wird, unter 1 %₀ bringen.

Das Verfahren ist nicht auf konvexe Körper beschränkt. Der Satz, daß die Oberfläche gleich dem Vierfachen mittleren Umrißinhalt ist, gilt auch für nicht konvexe Körper, wenn man nur die sich bei einer Projektion mehrfach überdeckenden Flächenstücke entsprechend mehrfach zählt. So läßt sich z. B. der Inhalt einer durch Schichtlinien dargestellten Fläche bestimmen, wenn man senkrechte Parallelprojektionen dieser Fläche in den verschiedenen Richtungen zeichnet. Diese Zeichnung ist mit Hilfe eines sogenannten Affinzeichners verhältnismäßig schnell herzustellen.

Schließlich läßt sich nach diesem Verfahren auch die Oberfläche eines porösen (schwammartigen) Körpers bestimmen. Bei diesem extrem nicht konvexen Körper überdeckt sich die Oberfläche bei der Projektion sehr oft. Im Mittel beträgt die Überdeckung in allen Punkten bei gleicher Schichtdicke gleichviel. Zählt man — nötigenfalls unter dem Mikroskop — auf einer ebenen Schnittfläche $z$ Poren längs einer Strecke $a$, dann ergibt sich daraus, daß ein Würfel von der Kantenlänge $a$ die Oberfläche $4z \cdot a^2$ hat. Voraussetzung ist dabei, daß sich der poröse Körper nach allen Richtungen gleich verhält, anderenfalls ist wieder der Mittelwert dadurch zu bilden, daß man Meßstrecken von der Länge $a$ nach verschiedenen Richtungen legt. 396, 9

## 10. Berechnung zylindrischer Schalen bei speziellen Randbedingungen.

Von *Konrad Ludwig* in Hannover.

Die Gleichgewichtsgleichungen sind

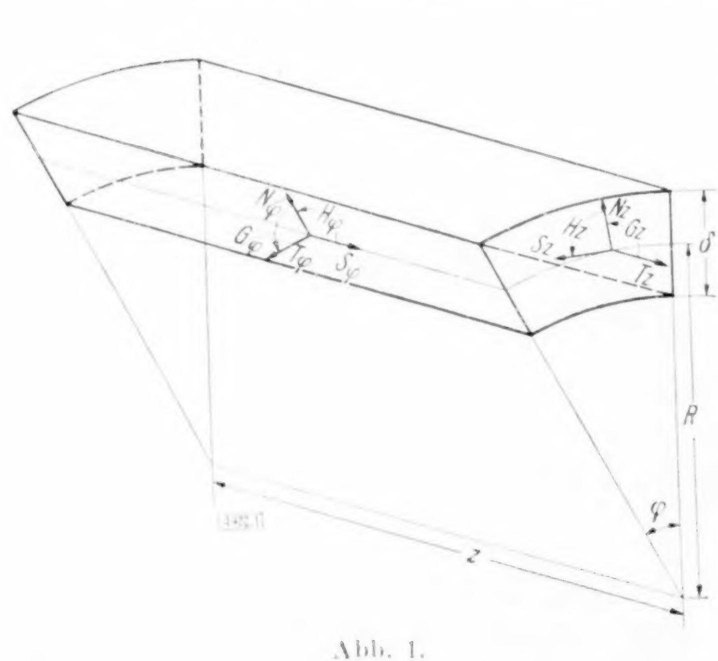



Abb. 1.

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{R}\frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{R} T_\varphi + \frac{\partial N_z}{\partial z} - \delta \gamma \cos \varphi = 0 \\ \frac{1}{R} N_\varphi + \frac{1}{R}\frac{\partial T_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial S_z}{\partial z} + \delta \gamma \sin \varphi = 0 \end{aligned}\right\} \quad \gamma \text{ spez. Gewicht}$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial S_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial T_z}{\partial z} = 0 .$$

$$S_\varphi - S_z - \frac{H_\varphi}{R} = 0$$

(Wird durch die Spannungs-Verschiebungsgleichungen bei Beschränkung auf die 1. Potenz der Dicke identisch erfüllt.)

$$\frac{1}{R}\frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + N_z + \frac{\partial G_z}{\partial z} = 0$$

$$-N_\varphi + \frac{1}{R}\frac{\partial G_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

und die Spannungs-Verschiebungsgleichungen

$$T_\varphi = D\left(\frac{1}{R} u + \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \mu \frac{\partial w}{\partial z}\right) \qquad G_\varphi = B\left(-\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{R^2} u - \frac{\mu}{R}\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$T_z = D\left(\frac{\mu}{R} u + \frac{\mu}{R}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \qquad G_z = B\left(\frac{\mu}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{\mu}{R^2} u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{2\mu}{R^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$S_\varphi = \frac{(1-\mu) D}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right) \qquad H_\varphi = \frac{(1-\mu) B}{2}\left(\frac{2}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi\, \partial z} - \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)$$

$$S_z = S_\varphi \qquad H_z = \frac{(1-\mu) B}{2}\left(-\frac{2}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi\, \partial z} + \frac{2}{R}\frac{\partial v}{\partial z}\right).$$

Aus den Gleichgewichtsgleichungen und den Spannungs-Verschiebungsgleichungen folgen die Differentialgleichungen für die Verschiebungskomponenten:

$$-\frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4} - 2R^2 \frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^2 \partial z^2} - R^4 \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \mu R^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{R^2 D}{B} u + \frac{(3+\mu) R^2}{2} \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi \partial z^2} - \frac{R^2 D}{B} \frac{\partial v}{\partial \varphi}$$

$$-\frac{(1+\mu) R}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^2 \partial z} + R^3 \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} - \mu R \frac{R^2 D}{B} \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\delta R^4 \gamma}{B} \cos \varphi$$

$$-\frac{\partial^3 u}{\partial \varphi^3} - R^2 \frac{\partial^3 u}{\partial \varphi \partial z^2} + \left(\frac{R^2 D}{B} - 1\right) \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{R^2 D}{B} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + (1-\mu) R^2 \left(\frac{1}{2} \frac{R^2 D}{B} + 1\right) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

$$+ R\left(\frac{1+\mu}{2} \frac{R^2 D}{B} - \mu\right) \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial z} = -\frac{\delta R^4 \gamma}{B} \sin \varphi$$

$$\mu R \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{(1+\mu) R}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial z} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + R^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 .$$

Der Ansatz für das allgemeine Integral der Differentialgleichungen ohne Störungssummanden

$$u = K_1 \cos \lambda \varphi \, e^{\frac{\nu}{R} z} \qquad v = K_2 \sin \lambda \varphi \, e^{\frac{\nu}{R} z} \qquad w = K_3 \cos \lambda \varphi \, e^{\frac{\nu}{R} z}$$

ergibt die charakteristische Gleichung

$$\left(\frac{R^2 D}{B} + 2\right) \nu^8 - \left(4 \frac{R^2 D}{B} + 3 - 2\mu\right) \lambda^2 \nu^6 + \left(6 \frac{R^2 D}{B} - 4\mu\right) \lambda^4 \nu^4 - \left[(5+\mu) \frac{R^2 D}{B} - 4\mu\right] \lambda^2 \nu^4$$

$$+ (1-\mu^2) \frac{R^2 D}{B} \left(\frac{R^2 D}{B} + 2\right) \nu^4 - \left(4 \frac{R^2 D}{B} - 1 - 2\mu\right) \lambda^6 \nu^2 + \left[(7+\mu) \frac{R^2 D}{B} - 1 - 2\mu\right] \lambda^4 \nu^2 - (3+\mu) \frac{R^2 D}{B} \lambda^2 \nu^2$$

$$+ \frac{R^2 D}{B} \lambda^8 - 2 \frac{R^2 D}{B} \lambda^6 + \frac{R^2 D}{B} \lambda^4 = 0$$

und die Lösung

$$u = K_4 \, U(\lambda, \nu) \cos \lambda \varphi \, e^{\frac{\nu}{R} z} \qquad v = K_4 \, V(\lambda, \nu) \sin \lambda \varphi \, e^{\frac{\nu}{R} z} \qquad w = K_4 \, W(\lambda, \nu) \cos \lambda \varphi \, e^{\frac{\nu}{R} z} .$$

Der von $z$ unabhängige Ansatz für das partikuläre Integral ergibt die mit $1-\mu^2$ multiplizierte Lösung für den Kreisbogen.

Herr Prof. Reissner, der diese Arbeit anregte, bemerkte, daß die Weiterführung der Lösung einfach ist, wenn die eingespannten Achsenschnitte in ihrer Ebene oder die gelenkig gelagerten Achsenschnitte in der Ringrichtung gleiten können. Dann muß ($\beta$ halber Öffnungswinkel) $\sin \lambda \beta$ oder $\cos \lambda \beta = 0$ sein. Zu jedem Wert $\lambda$ ergibt die charakteristische Gleichung 8 Werte $\nu$, die nicht rein imaginär sind, so daß keine in $z$ periodische Lösung existiert. Die Randbedingungen für die beliebig belasteten Stirnflächen ergeben für je 8 Entwicklungskoeffizienten $K_4$ 8 lineare Gleichungen. 402, 10

## 11. Ebenes und achsensymmetrisches Problem der Elastizitätstheorie*).

Von *K. Marguerre* in Karlsruhe.

Ein bekanntes Verfahren zur Gewinnung von partikulären Integralen der elastischen Differentialgleichungen beruht auf der Einführung von sogen. Spannungsfunktionen:

Indem man die Spannungskomponenten in geeigneter Weise als partielle Ableitungen dieser Funktionen nach den Koordinatenrichtungen ansetzt, werden die Gleichgewichtsgleichungen identisch befriedigt, und für die Funktionen selbst erhält man aus den Spannungs-

*) Vgl. hierzu: [1]) C. Weber: ZAMM 5, S. 466 (1925). [2]), [3]) Love-Timpe: Lehrbuch der Elast., S. 317 und S. 243, Leipzig (1907). [4]) K. Marguerre: Ing.-Arch. 2, S. 111 (1931). [5]) Ebenda 4, S. 333 (1933). An dieser Stelle ist ein Schreibfehler zu korrigieren: in (1.32) muß es statt $\tau = \ldots \Delta \Phi_r + \ldots$ heißen $\tau = \ldots \frac{\partial}{\partial r} \Delta \Phi + \ldots = \ldots \bar{\Delta} \Phi_r + \ldots$ $\bar{\Delta}$ (vgl. auch ([4])) ist eine Abkürzung für den Operator $\left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\right)$. [6]) Love-Timpe: a. a. O. S. 248, 219, 250, 226.

Dehnungsgleichungen gewisse partielle Differentialgleichungen, für die sich — das ist der Sinn der Methode — Partikularlösungen angeben lassen. Das älteste Beispiel dieser Art ist die Airysche Funktion, die den Sonderfall des ebenen Problems auf die Randwertaufgabe der Bipotentialgleichung zurückführt. Außer den ebenen Problemen sind vor allem die achsensymmetrischen einer Behandlung nach dieser Methode zugänglich, da sich hier (wie im ebenen Fall) die Zahl der unabhängigen Ortsveränderlichen auf zwei reduziert. Das Analogon zum Airyschen Ansatz ist hier die von C. Weber[1]) angegebene „Umdrehungsfunktion". Älter ist ein von diesem verschiedener Ansatz von Love[2]), durch den das Problem ebenfalls auf die Bipotentialgleichung zurückgeführt wird. Dieser letztere Ansatz zeichnet sich vor dem Airy-Weberschen dadurch aus, daß sich die Verschiebungen durch einfache Ableitungsbildung aus einer Oberfunktion ergeben, daß man also bei vorgeschriebenen Verschiebungsrandwerten nicht den Umweg über weitere Hilfsfunktionen[3]), oder eine Integration[4]) einschlagen muß.

Der unübersichtliche Weg, auf dem Love seine Funktion herleitet, läßt den Wesensunterschied gegenüber der Airyfunktion nicht deutlich werden. Man kann die Lovesche Funktion nämlich ganz besonders einfach erhalten (und mit ihr ihr ebenes Analogon, was für die Parallelbehandlung gleichgearteter Probleme von größtem Vorteil ist), wenn man von den Cauchyschen Gleichungen, ausgedrückt in den Verschiebungen, ausgeht. Diese lauten in Vektorform:

$$(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad\,div}\,\mathfrak{u} - \mu\,\mathrm{rot\,rot}\,\mathfrak{u} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Mit $\mathfrak{u} = \mathrm{grad}\,\varphi + \mathrm{rot}\,\mathfrak{a}$ wird daraus:

$$\Delta\left[(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\varphi + \mu\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{a}\right] = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Im ebenen und achsensymmetrischen Fall hat $\mathfrak{a}$ nur eine Komponente:

$$\mathfrak{a} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}(0, 0, \psi) \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Aus (2) wird daher:

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\right) = 0 & \Delta\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial r} + \dfrac{\partial \psi}{\partial z}\right) = 0 \\ \Delta\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} - \dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0 & \Delta\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\,\psi)\right) = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4).$$

Durch

$$\varphi = \Phi_y, \quad \psi = -\Phi_x \qquad \Big| \qquad \varphi = \Phi_z, \quad \psi = -\Phi_r$$

wird die erste dieser Gleichungen identisch befriedigt und aus der zweiten erhält man in beiden Fällen $\Delta\Delta\Phi = 0$.

Die Verschiebungskomponenten $u, v$ (bzw. $q, w$) stellen sich dar durch

$$u = -\frac{\lambda + \mu}{\mu}\Phi_{xy} \qquad \Big| \qquad q = -\frac{\lambda + \mu}{\mu}\Phi_{rz}$$

$$v = -\frac{\lambda + \mu}{\mu}\Phi_{yy} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}\Delta\Phi \qquad \Big| \qquad w = -\frac{\lambda + \mu}{\mu}\Phi_{zz} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}\Delta\Phi,$$

woraus sich die Spannungen ohne Schwierigkeit herleiten lassen[5]). Eine unmittelbare Anwendung dieser Gleichungen bilden die Formeln, die die Beanspruchung eines unendlich ausgedehnten Mediums durch eine Einzelkraft darstellen. Durch $\Phi_1 = R$ bzw. $\Phi_1 = \frac{r^2}{2}(\ln r - 1)$ $[R^2 = r^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2]$ erhält man die Beanspruchung des Raumes bzw. der Ebene durch $P = 4\pi(\lambda + \mu)$ bzw. $P' = 2\pi(\lambda + \mu)$ im Punkt (0,0), durch lineare Kombination dieser Bipotentiale mit den Potentialen $\Phi_2 = z\ln(R + z) - R$ bzw. $\Phi_2 = \Re\left[\frac{(x + iy)^2}{2}\ln(x + iy)\right]$ $= \frac{1}{2}(2xy\vartheta - (x^2 - y^2)\ln r)$ die von Halbraum bzw. Halbebene[6]). Zur Lösung eines komplizierteren Problems ist der Ansatz in der unter [5]) zitierten Arbeit des Verfassers verwendet.

# 12. Elastisch-strenge Lösungen zur Kerbwirkung bei Scheiben und Umdrehungskörpern[1]).

Von *Heinz Neuber* in München.

Mit Hilfe isometrischer Koordinaten werden Spannungsfunktionen angegeben, welche die an kerbartig gekrümmten Randflächen auftretende Spannungserhöhung jeweils als Funktion des Krümmungsmaßes der Kerbe zu berechnen gestatten.

Für Scheiben genügt die Angabe der Airyschen Spannungsfunktion $F$, einer biharmonischen Funktion, deren erste Ableitungen nach cartesischen Koordinaten $(x, y)$ längs des unbelasteten Randes konstant sind. Wir gehen auf ein isometrisches Koordinatensystem $u$, $v$ über, so daß

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2}=h\left(=\sqrt{g_{11}} \text{ in Tensorschreibweise}\right) \quad (1).$$

Alle harmonischen Funktionen in $x$ und $y$ sind nun zugleich solche in $u$ und $v$. Die biharmonischen Funktionen erhalten wir aus den harmonischen durch Multiplikation mit $x$ oder $y$[2]). $\sigma_u$ sei die Spannung normal zu einer Linie $u=$ const., entsprechend $\sigma_v$ und $\tau_{uv}$. Wir erhalten nach den Regeln der Tensorrechnung[3]):

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_u&=\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial F}{\partial v}\right)+\frac{1}{h^3}\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial u}, \qquad \sigma_v=\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial F}{\partial u}\right)+\frac{1}{h^3}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial v},\\
\tau_{uv}&=-\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial F}{\partial u}\right)+\frac{1}{h^3}\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v}
\end{aligned}\right\} \quad (2).$$

**1. Die symmetrische Außenkerbe unter Zug** (Abb. 1 u. 2).

Bezugsnetz: $x=\mathfrak{Sin}\, u \cos v, \qquad y=\mathfrak{Cof}\, u \sin v$ . . . . . . . . . . . . (3).

Die Scheibe (Dicke $d$) ist in Richtung der $X$-Achse auf Zug beansprucht (Resultierende $P$) und längs einer Hyperbel $v_0$ lastfrei. Es wird:

$$F=p\,\frac{\sin v_0}{v_0+\sin v_0\cos v_0}\left(y\,v+\sin^2 v_0\cdot e^{-u}\cos v\right), \qquad p=\frac{P}{2\,a\,d}, \qquad \frac{a}{\varrho}=\mathrm{tg}^2\, v_0 \quad . \quad . \quad (4),$$

$$\sigma_{\max}=p\,\frac{2\left(\frac{a}{\varrho}+1\right)\sqrt{\frac{a}{\varrho}}}{\left(\frac{a}{\varrho}+1\right)\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{a}{\varrho}}+\sqrt{\frac{a}{\varrho}}}, \quad \text{Näherungsformel: } \sigma_{\max}=p\left(\sqrt{1{,}6\,\frac{a}{\varrho}+1{,}2}-0{,}1\right) \quad (5).$$

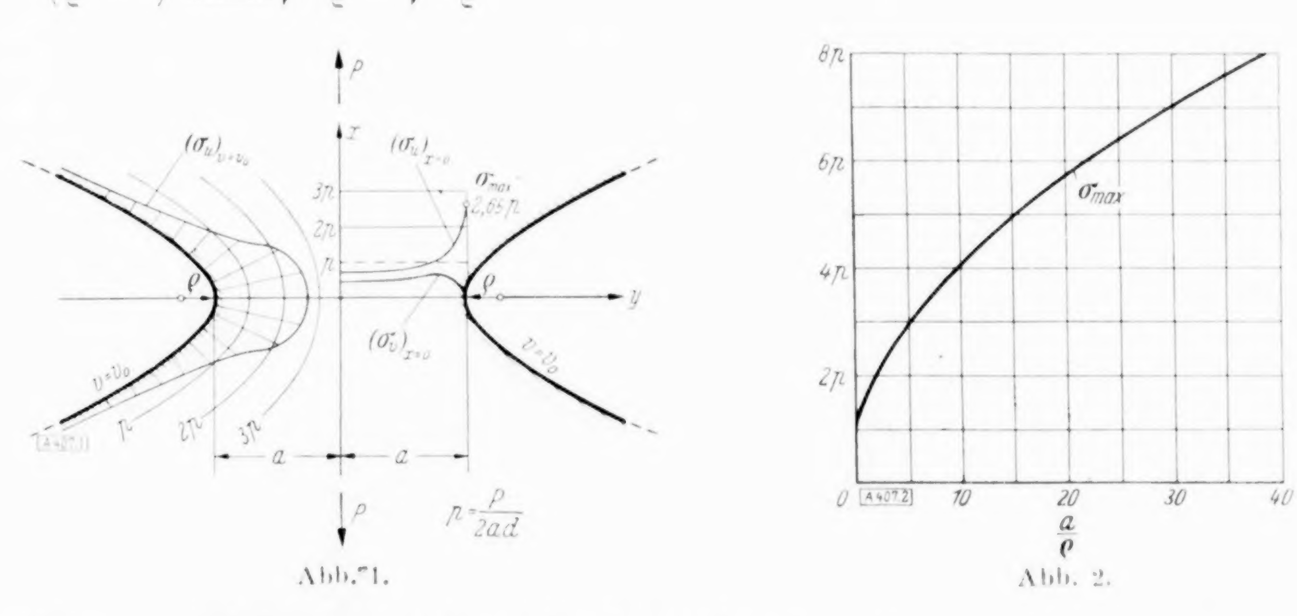


Abb. 1. Abb. 2.

**2. Der symmetrische Vorsprung unter Zug** (Abb. 3 u. 4).

Bezugsnetz: $x=u+\frac{u}{u^2+v^2}, \qquad y=v-\frac{v}{u^2+v^2}$ . . . . . . . . . (6).

Die $v$-Linien sind für großes $u$ oder $v$ geradlinig, jedoch tritt in der Nähe des Ursprungs eine Auslenkung nach Art eines Vorsprungs ein. Die Scheibe ist längs einer Linie $v_0$ last-

[1]) Hierbei möchte ich Herrn Prof. Dr. L. Föppl für seine Anregungen meinen ganz ergebensten Dank zum Ausdruck bringen.

[2]) L. Föppl: Konforme Abbildung ebener Spannungszustände, ZAMM, Bd. 11, 1931, S. 81.

[3]) H. Neuber: Beiträge für den achssymm. Spannungszustand, Diss. München 1932, S. 6.

frei und in der $X$-Richtung, vom Vorsprung abgesehen, gleichmäßig auf Zug beansprucht (Spannung $p$). Es wird:

$$F=\frac{p}{2}(v-v_0)^2\left[1-\frac{1}{(1+2\,v_0^{\,2})(u^2+v^2)}\right],\qquad \frac{a}{\varrho}=\frac{1}{4\,v_0^{\,3}}\sqrt{\frac{1+20\,v_0^{\,2}-8\,v_0^{\,4}-(1-8\,v_0^{\,2})^{3/2}}{2(1+v_0^{\,2})}}\qquad(7),$$

$$\sigma_{\max}=p\left[1+\frac{(1+4\,v_0^{\,2})(\sqrt{1+v_0^{\,2}}-v_0)}{4\,v_0(1+2\,v_0^{\,2})}\right],\ \text{Näherungsformel: }\sigma_{\max}=p\left(\sqrt{0{,}06\,\frac{a}{\varrho}+0{,}01}+0{,}92\right)\ (8).$$

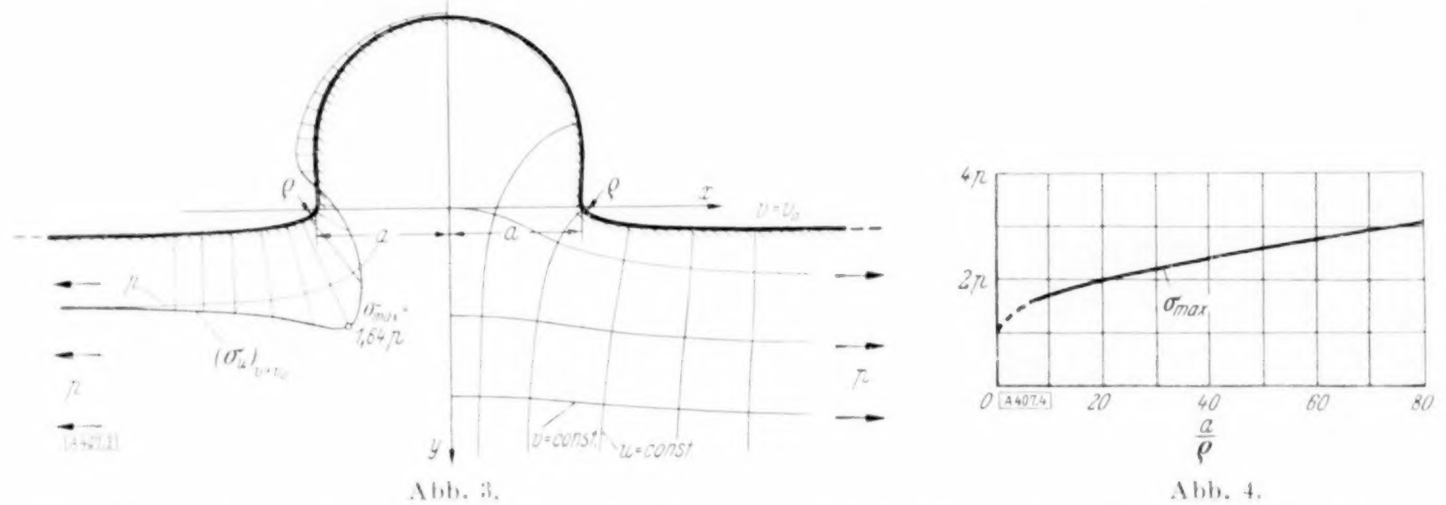



Abb. 3. Abb. 4.

Für Umdrehungskörper bei Torsionsbeanspruchung kann eine Spannungsfunktion $\Phi$ benutzt werden [4]), welche längs der Spannungslinien und des lastfreien Randes konstant ist. Wir nehmen auf Ellipsoidkoordinaten entsprechend den Gl. (3) mit $r$ statt $y$ Bezug. Die Differentialgleichung für $\Phi$ hat dann die Form [5]):

$$\mathfrak{Cof}^3\,u\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\mathfrak{Cof}^{-3}\,u\,\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)+\sin^3 v\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\sin^{-3} v\,\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)=0\quad\ldots\ldots\ldots\quad(9).$$

**3. Die Umdrehungsaußenkerbe bei Torsionsbeanspruchung** (Abb. 5 u. 6).

Der Umdrehungskörper sei längs einer Hyperboloidfläche $v_0$ lastfrei. Es wird [6]):

$$\Phi=\Phi(v),\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial v}=p\,\frac{3(1+\cos v_0)^2\sin^3 v}{4(2+\cos v_0)\sin v_0},\qquad p=\frac{2M}{\pi a^3},\qquad \frac{a}{\varrho}=\mathrm{tg}^2\,v_0\ \ldots\ldots\ (10),$$

$$\tau_{\max}=p\,\frac{3\left(1+\sqrt{\frac{a}{\varrho}+1}\right)^2}{4\left(1+2\sqrt{\frac{a}{\varrho}+1}\right)},\qquad \text{Näherungsformel: }\tau_{\max}=p\left(\sqrt{0{,}14\,\frac{a}{\varrho}+0{,}18}+0{,}57\right)\ \ldots\ (11).$$

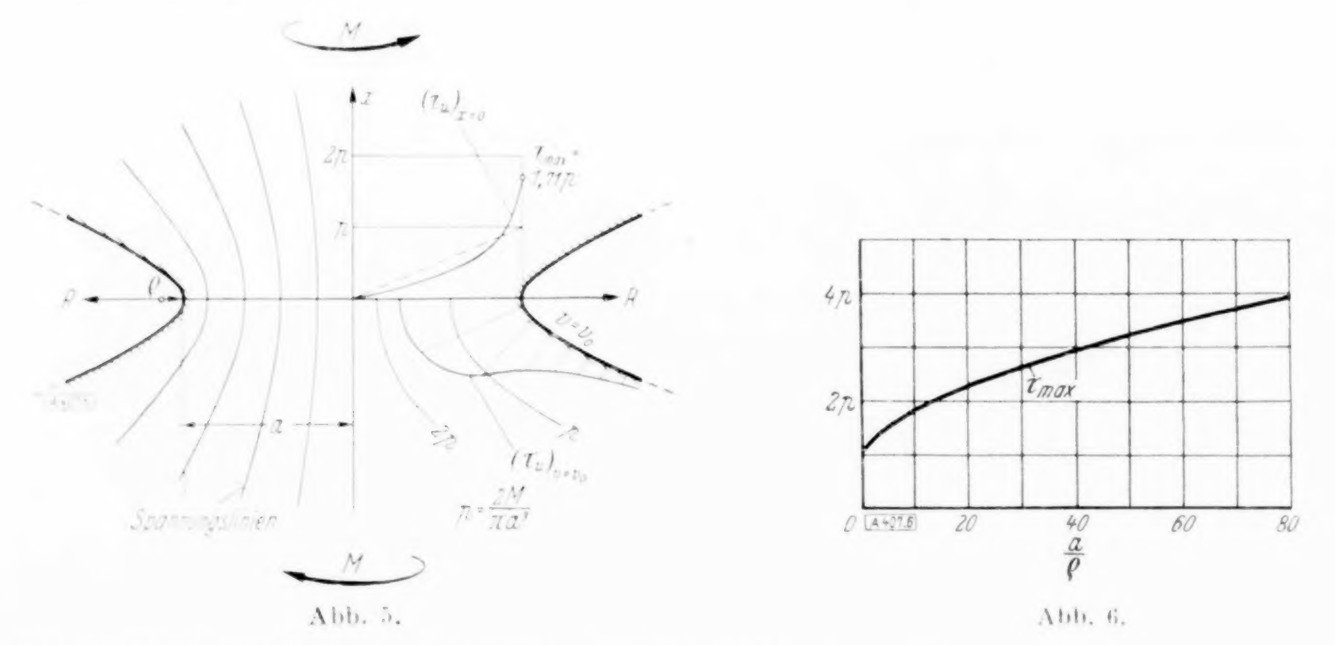



Abb. 5. Abb. 6.

**4. Die Umdrehungsinnenkerbe unter Torsion** (Abb. 7 u. 8).

Ein auf Torsion beanspruchter Zylinder vom Radius $b$ besitzt in seinem Innern einen Hohlraum von der Gestalt eines Umdrehungsellipsoids ($u_0$), dessen Radius $a$ gegenüber $b$ so klein sei, daß die durch den Hohlraum hervorgerufene Störung für $r=b$ bereits praktisch als abgeklungen angesehen werden kann. Dann wird:

[4]) Th. Pöschl: ZAMM, Bd. 2, 1932, S. 137; R. Sonntag, ZAMM, Bd. 9, 1929, S. 1.

[5]) Vgl. Th. Pöschl: loc. cit., S. 142.

[6]) Diese Lösung ist schon bekannt (vgl. Anm. 5), jedoch fehlt offenbar noch ihre Deutung im Rahmen der Kerbwirkung, vor allem die Formel für $\tau_{\max}$ als Funktion von $\frac{a}{\varrho}$.

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \frac{p}{4\,\mathfrak{Cof}\,u_0}\left[\mathfrak{Cof}^4 u - \frac{\mathfrak{Cof}^4 u_0}{f(u_0)}\,f(u)\right]\sin^4 v, \qquad p = \frac{2\,M\,a}{\pi\,b^4}, \qquad \frac{a}{\varrho} = \mathfrak{Cot}^2 u_0 \\ f(u) &= \mathfrak{Cof}^4 u \cdot \operatorname{arc\,cot}(\mathfrak{Sin}\,u) - \left(\mathfrak{Cof}^2 u + \frac{2}{3}\right)\mathfrak{Sin}\,u \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (12).$$

Mit

$$c = \frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a}{\varrho}-1}}{\sqrt{\frac{a}{\varrho}-1}}, \text{ wenn } \frac{a}{\varrho} > 1 \text{ bzw. } c = \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{a}{\varrho}}}\ln\frac{1+\sqrt{1-\frac{a}{\varrho}}}{1-\sqrt{1-\frac{a}{\varrho}}}, \text{ wenn } \frac{a}{\varrho} < 1 \text{ wird}^{7)}\text{:} \quad (13),$$

$$\tau_{\max} = p\,\frac{2\left(\frac{a}{\varrho}-1\right)^2}{3\left(\frac{a}{\varrho}\right)^2 c - 5\,\frac{a}{\varrho} + 2}, \quad \text{Näherungsformel: } \tau_{\max} = p\left(\sqrt{0{,}18\,\frac{a}{\varrho}} + 0{,}06 + 0{,}75\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

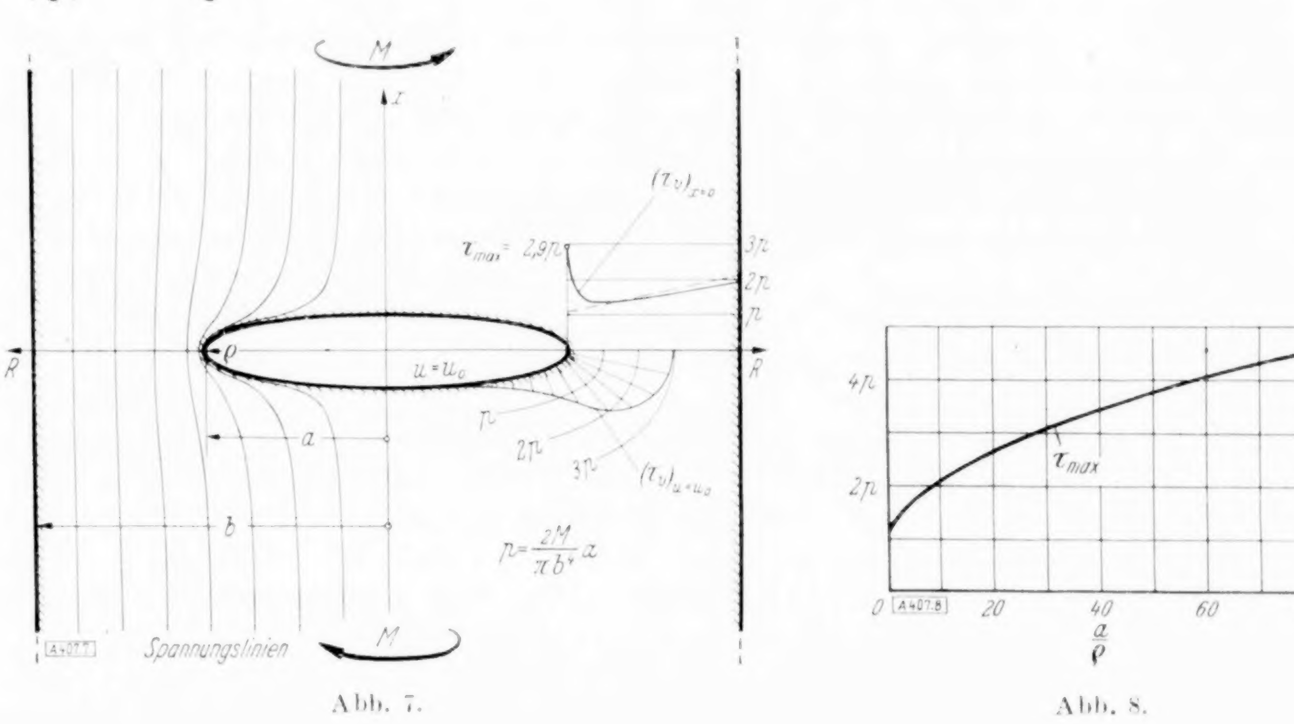



Abb. 7. Abb. 8.

Eine achsiale Bohrung von nicht allzu großem Durchmesser würde die Spannungsverteilung nicht wesentlich verändern, da das Material in der näheren Umgebung der Achse an Torsionsgleichgewicht kaum teilnimmt.

Für den gekerbten Umdrehungskörper bei Zug- oder Druckbeanspruchung wurden die Lösungen vom Verfasser mit Hilfe von Kugelfunktionen bereits an anderer Stelle[8]) abgeleitet. Es sollen hier nur die Endformeln veröffentlicht werden. Wieder gelten Ellipsoidkoordinaten. Die Normalspannungen sind $\sigma_u$ (normal zu den Ellipsoiden), entsprechend $\sigma_v$ und die Ringspannung $\sigma_t$. Die im Kerbgrund auftretende maximale Spannung sei jeweils mit $\sigma_1$, die an derselben Stelle wirkende Ringspannung mit $\sigma_2$ bezeichnet.

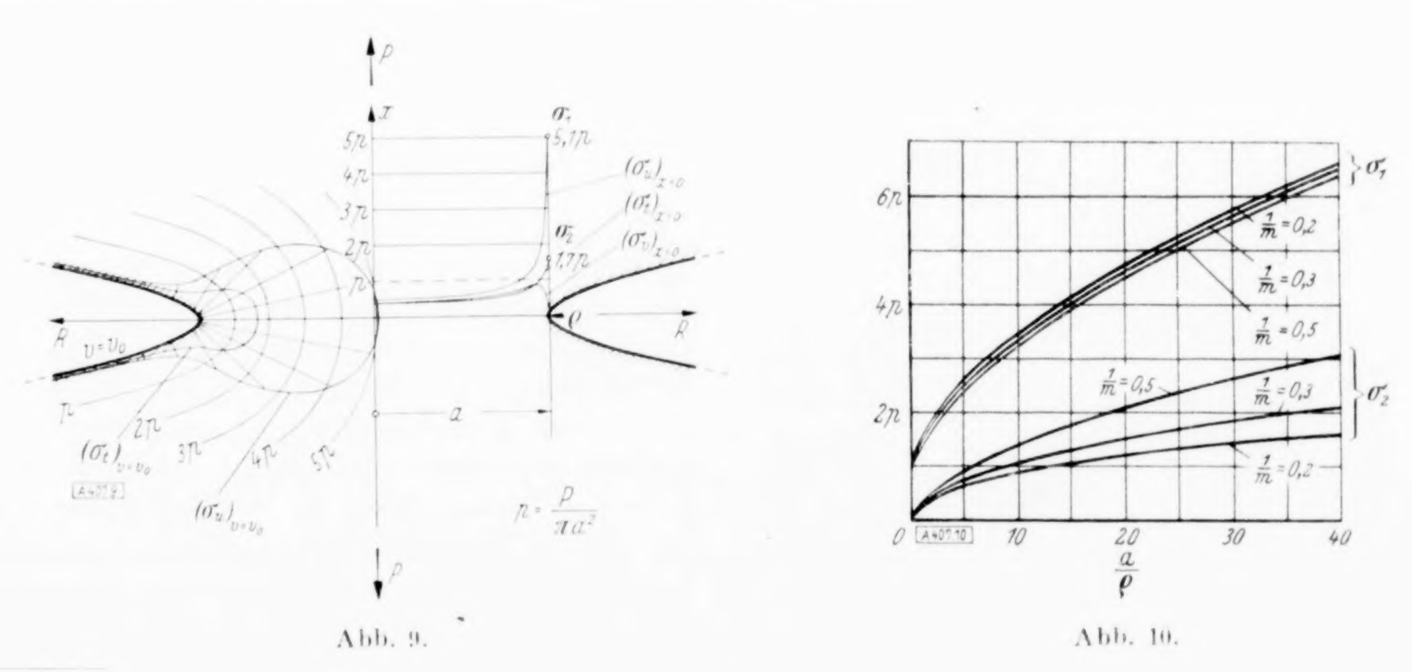



Abb. 9. Abb. 10.

---

[7]) Für $\frac{a}{\varrho} = 1$ erhält man mit Hilfe der arctg-Reihe $\frac{5}{4}\,p$, was in Polarkoordinaten leicht nachzuweisen ist.

[8]) H. Neuber: loc. cit., S. 30 u. ff.

**5. Die Umdrehungsaußenkerbe unter Zug** (Abb. 9 u. 10).

$$\sigma_1 = \frac{p}{N}\left[\frac{a}{\varrho}\sqrt{\frac{a}{\varrho}+1}+\left(0{,}5+\frac{1}{m}\right)\frac{a}{\varrho}+\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(\sqrt{\frac{a}{\varrho}+1}+1\right)\right] \quad \ldots \quad (15),$$

$$\sigma_2 = \frac{p}{N}\,\frac{a}{\varrho}\left[\frac{1}{m}\sqrt{\frac{a}{\varrho}+1}+0{,}5\right]; \quad \text{hierin ist } p=\frac{P}{\pi a^2},\; N=\frac{a}{\varrho}+\frac{2}{m}\sqrt{\frac{a}{\varrho}+1}+2 \quad \ldots \quad (16),$$

Näherungsformeln[9]):

$$\sigma_1 = p\left(\sqrt{\frac{a}{\varrho}+0{,}85}+0{,}08\right), \quad \sigma_2 = p\left(\sqrt{0{,}09\,\frac{a}{\varrho}-0{,}24}+0{,}27\right) \quad \ldots \quad (17).$$

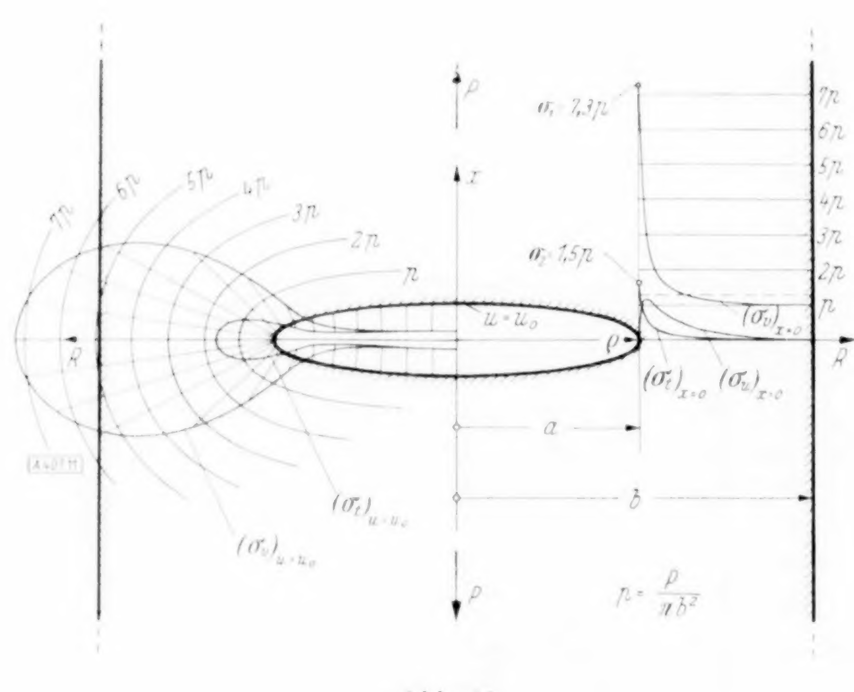



Abb. 11.

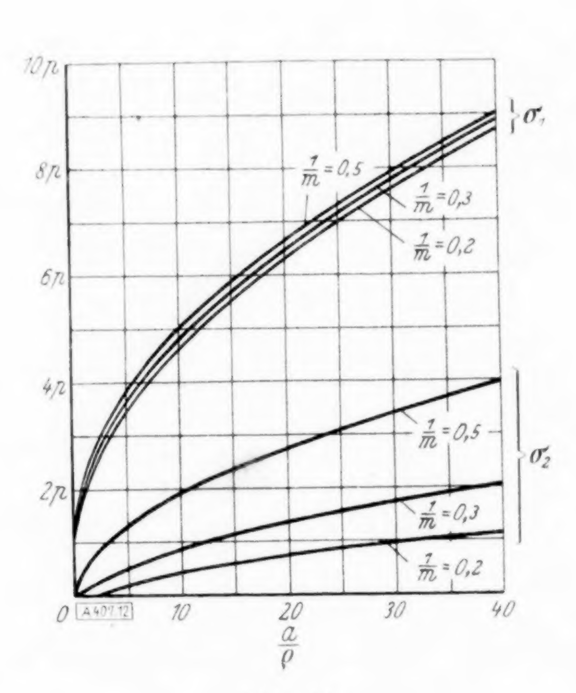



Abb. 12.

**6. Die Umdrehungsinnenkerbe unter Zug** (Abb. 11 und 12)[10]).

$$\sigma_1 = \frac{p}{N}\left\{2\left(\frac{a}{\varrho}\right)^2-\left(1{,}5-\frac{1}{m}\right)\frac{a}{\varrho}+1-\frac{1}{m}+\left[-\left(1{,}5+\frac{1}{m}\right)\frac{a}{\varrho}+\frac{1}{m}\right]\frac{a}{\varrho}\,c\right\} \quad \ldots \quad (18),$$

$$\sigma_2 = \frac{p}{N}\,\frac{a}{\varrho}\left\{\frac{2}{m}\,\frac{a}{\varrho}+1{,}5-\frac{2}{m}+\left[-\left(0{,}5+\frac{2}{m}\right)\frac{a}{\varrho}-1+\frac{2}{m}\right]c\right\} \quad \ldots \quad (19).$$

Hierin ist

$$p=\frac{P}{\pi b^2},\quad N=\frac{a}{\varrho}+1-\frac{1}{m}+\left(\frac{a}{\varrho}-2+\frac{2}{m}\right)\frac{a}{\varrho}\,c-\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(\frac{a}{\varrho}\right)^2 c^2; \text{ für } c \text{ gilt wieder Gl. (13)} \quad (20).$$

Näherungsformeln[9]):

$$\sigma_1 = p\left(\sqrt{1{,}6\,\frac{a}{\varrho}+0{,}05}+0{,}78\right), \quad \sigma_2 = p\left(\sqrt{0{,}14\,\frac{a}{\varrho}-0{,}05}-0{,}29\right) \quad \ldots \quad (21).$$

Da die Spannungen in allen Fällen vom Kerbgrund weg außerordentlich schnell abklingen, werden die jeweiligen Endformeln auch für ähnlich gestaltete, in der Technik vorkommende gekrümmte Randflächen (vgl. Abb. 13 bis 16) mit ziemlicher Genauigkeit anwendbar sein, wofern es sich nur in der näheren Umgebung des Kerbgrundes um gleichartige Oberflächenform handelt.

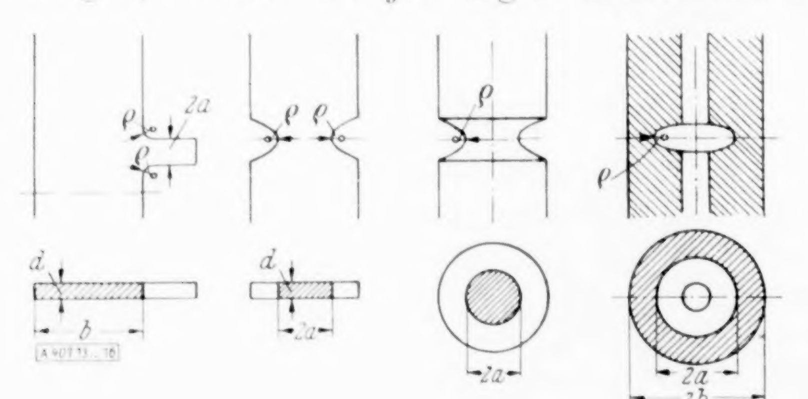



Abb. 13 bis 16.

Bei Maschinenteilen, die schnellem Belastungswechsel unterworfen sind, kommt den hier gegebenen Formeln besondere Bedeutung zu, da die Bruchgefahr dann erfahrungsgemäß in hohem Maße von der Kerbwirkung abhängt.

407, 12

[9]) Für $1/m = 0{,}3$; die Formeln für $\sigma_2$ gelten für $\frac{a}{\varrho} > 4$.

[10]) Wie beim Problem 4 muß $b$ genügend groß gegenüber $a$ vorausgesetzt werden.

## 13. Mathematische Theorie des Schwingenfluges.

Von *Werner Schmeidler* in Breslau.

Es wird die Theorie eines schwingenden Flügels entwickelt, bei dem gleichzeitig die Flügeltiefe als zeitlich variabel angenommen wird. Obwohl dies bei den Vögeln kaum zutrifft, kann die dargestellte Theorie nicht insofern mit dem Vogelflug in Verbindung gebracht werden, als infolge der verschiedenen Durchlässigkeit eines Vogelflügels bei verschiedenen Anstellwinkeln sich Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte ergeben, die bei geometrisch fest vorgegebenem Profil nicht allein durch die Verschiedenheit der Anstellwinkel erklärt werden können. Es liegt daher nahe, zum Ersatz für diese sonst theoretisch schwer erfaßbaren Unterschiede eine „äquivalente" Flügeltiefe einzuführen und während der Bewegung in geeigneter Weise variiert zu denken. Ein weiteres Interesse für die theoretische Untersuchung des neuen Prinzips beruht auf dem alten Problem der technischen Verwirklichung des Schwingenfluges, das bekanntlich schon die Väter der heutigen Fliegerei, wenn auch erfolglos, beschäftigt hat. Wenn hier angeregt wird, dieses Problem mit der neuen Variante der gleichzeitigen Veränderung der Flügeltiefe als technische Aufgabe in Angriff zu nehmen, so kann sich der Verfasser dabei auf die unter seiner Leitung im Versuchsflugzeugbau der Technischen Hochschule Breslau geleisteten Vorarbeiten über Flugzeuge mit im Flug veränderlichen Tragflächen berufen. Der Reiz der Aufgabe, deren Schwierigkeiten nicht unterschätzt werden, liegt in energetischen Vorzügen des Schwingenflugzeugs gegenüber dem Propellerflugzeug, die besonders hervortreten, wenn der Antrieb der Schwingbewegung mit Hilfe eines Resonanzprinzips erfolgt.

Die mathematische Durchführung geht wie die Prandtlsche Theorie des Normalflugzeugs von der ebenen Potentialströmung um ein Profil aus, dessen Tiefe aber jetzt zeitlich variiert, während gleichzeitig das Profil nicht nur eine Translationsbewegung, sondern infolge des Schwingens auch eine (periodisch veränderliche) Drehbewegung relativ zur Luft ausführt. Die zeitlich veränderliche Zirkulation kann dann mit der zeitlich veränderlichen Flügeltiefe in eine ähnliche Relation gebracht werden, wie dies im Normalfalle geschieht; der induzierte Widerstand ist dabei natürlich auch zu berücksichtigen. Während aber im Normalfalle die Koeffizienten der Zirkulation durch Gleichungen berechnet werden können, geschieht dies jetzt durch Differentialgleichungen. Es gelingt, eine periodische Näherungslösung dieses Differentialgleichungssystems anzugeben und dadurch zeitliche Mittelwerte für den Auftrieb und den an Stelle des Widerstandes sich ergebenden Vortrieb zu erhalten, die in konkreten Fällen über die zu erwartenden Kräfte näherungsweise Aufschluß geben. 390, 13

## 14. Der Umschlag von Oberflächenwellen.

Von *M. Schuler* in Göttingen.

Im folgenden will ich von einer bisher unbekannten Erscheinung bei Oberflächenwellen des Wassers berichten, die ich beobachtet habe. Es handelt sich um den Wellenumschlag von einer laufenden Welle in eine stehende Welle, die aber senkrecht zur laufenden Welle schwingt.

Ich hatte Herrn Dimpker veranlaßt, die Wellen zu studieren, die von einem an der Oberfläche des Wassers schwingenden Körper ausgehen. Die Versuche wurden im Institut für angewandte Mechanik der Universität zu Göttingen durchgeführt. Als Versuchskörper (Abb. 1) hatte ich einen halb eingetauchten Zylinder, eine ebene Platte und einen Keil gewählt. Die Körper wurden in einem Tank so aufgehängt, daß sie von einer Tankwand zur anderen reichten. Dadurch kann man die Körper für die Rechnung als unendlich lang ansehen. Durch einen Elektromotor wurde der Versuchskörper in vertikale Schwingungen versetzt. Durch die periodische Wasserverdrängung entstehen Wellen, die rechts und links von dem Körper weglaufen. Lamb hat die Wellen berechnet, die von einer unendlich langen, plötzlich belasteten Linie an der Wasseroberfläche ausgehen. Daraus hat Dimpker die Wellengleichung für eine an der Wasseroberfläche schwingende Linie abgeleitet. Durch Integration über den Körper erhielt er dann die Wellengleichung für den an der Wasseroberfläche schwingenden Körper. Die berechneten Wellenamplituden wurden verglichen mit den im Experiment gemessenen Wellenamplituden. Es zeigte sich, daß die Rechnung für die schwingende Platte gut stimmt. Für den Zylinder stimmt wohl die Form der Funktionskurve $A = f(\nu)$ ($A$ = Wellenamplitude; $\nu$ = Frequenz des schwingenden Körpers). Aber die berechneten Amplitudenwerte sind hier stets erheblich größer als die gemessenen. Dies kommt wohl daher, daß der Lambsche Ansatz, von dem Dimpker ausgegangen ist, nur für die an der Oberfläche schwingende Linie gilt, während der Zylinder bereits eine endliche Eintauch-

tiefe besitzt. Dies Problem wird zur Zeit in Göttingen weiter untersucht. Abb. 2 zeigt eine laufende Welle, die schräg von oben photographiert ist. *a* ist der halb eingetauchte Zylinder, der durch die Stützen (*b*) in vertikale Schwingungen versetzt wird. Der Zylinder schwingt im Augenblick der Aufnahme nach unten. Am Zylinder entsteht gerade eine neue Welle, während die vorherige Welle als heller Strich (*c*) auf dem Bilde sichtbar ist. Sie läuft um eine Wellenlänge voraus von dem Zylinder weg. In Abb. 3 sieht man die Welle längs der Tankwand laufen. Die Wand trägt ein Maßnetz, so daß Wellenlänge und Wellenamplitude abgemessen werden können. Bisher läuft das Experiment genau, wie dies die Theorie erwarten läßt. Ich will darauf nicht weiter eingehen, da diese Ergebnisse in der Dissertation von Dimpker veröffentlicht werden.

Steigert man aber die Frequenz des schwingenden Zylinders, so kommt eine ganz unerwartete Erscheinung; es entstehen auf den weglaufenden Wellenkämmen Kräusel, wie dies

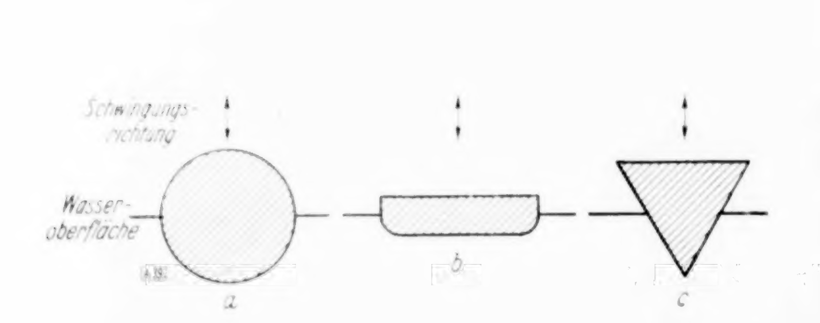



Abb. 1.
Querschnitt der Versuchskörper $a$ = Zylinder; $b$ = Platte; $c$ = Keil.

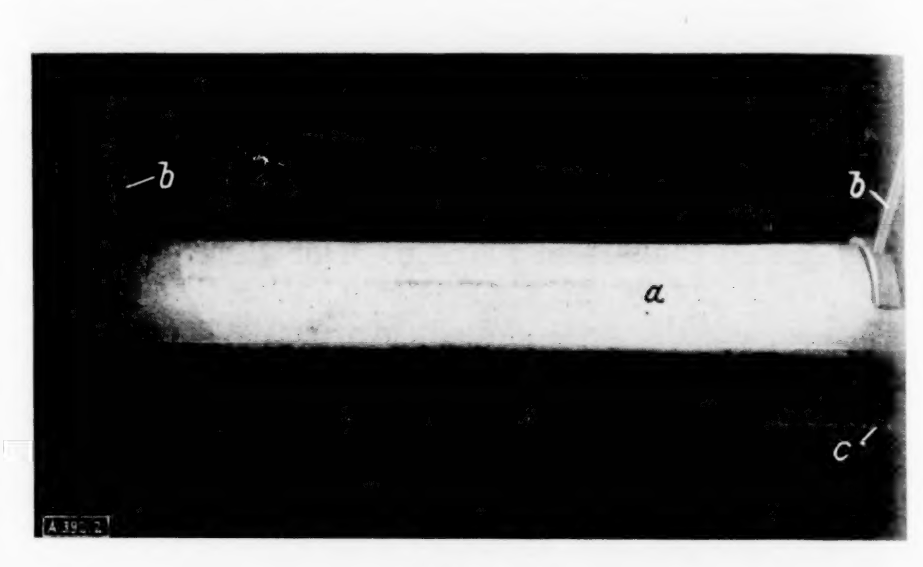



Abb. 2.

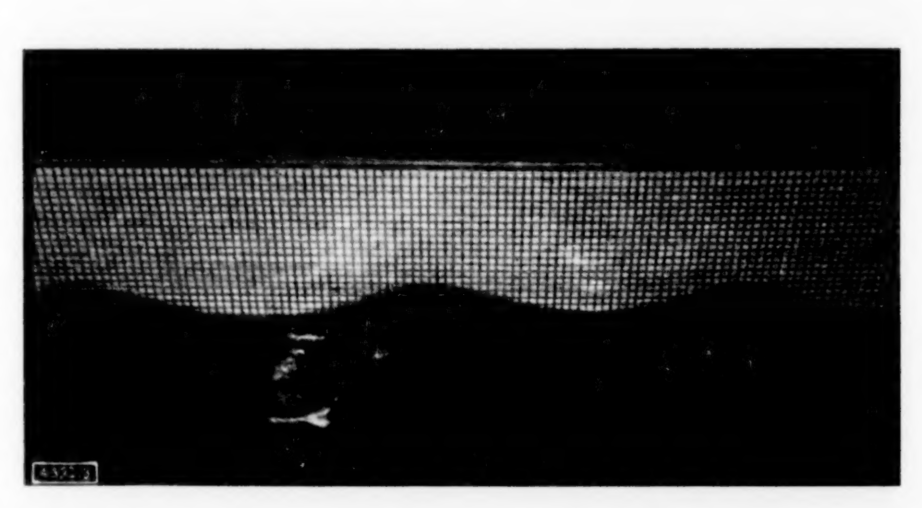


Abb. 3.

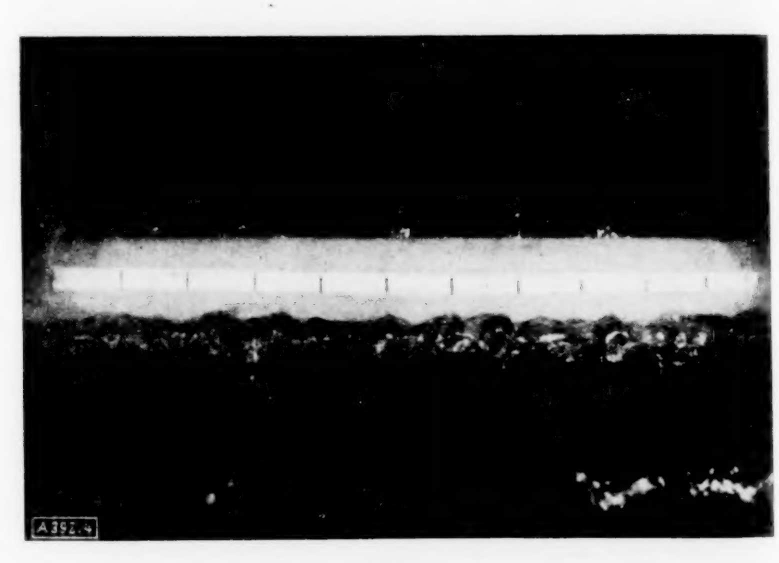


Abb. 4.



Abb. 5.

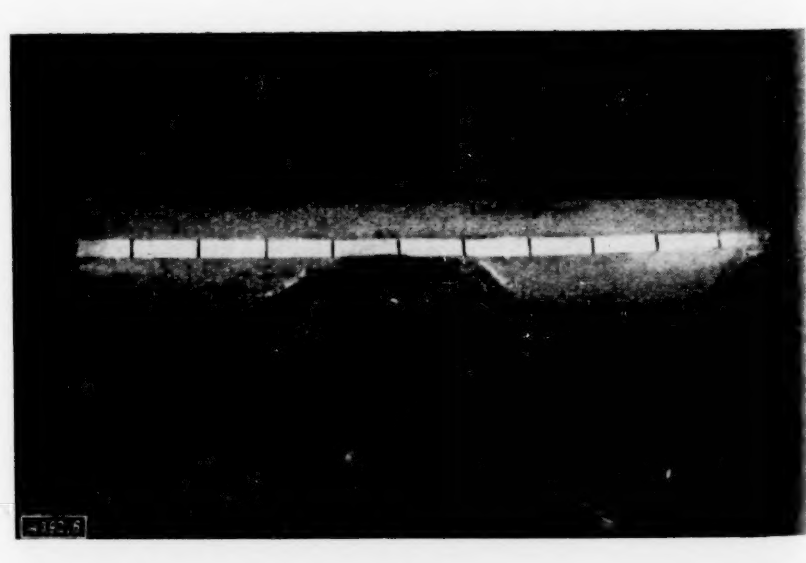


Abb. 6.

auf Abb. 4 zu sehen ist. Der Zylinder schwingt nach unten, und an dem Zylinder entsteht eine neue Welle. Der Wellenkamm ist aber jetzt nicht mehr glatt, sondern ein Gekräusel. Der davorlaufende Wellenkamm ist auf der Abbildung auch noch zu sehen, und er ist ebenfalls schon etwas gekräuselt. Der Zylinder trägt einen Maßstab, um die Größe der Kräusel ausmessen zu können. Einen Augenblick später erhält man Abb. 5. Die Kräusel ziehen sich zu größeren Kräuselballen zusammen, und noch etwas später erhält man ein Wellenbild nach Abb. 6. Die laufende Welle ist fast ganz verschwunden. Sie ist in eine stehende Welle umgeschlagen, die senkrecht zu der ursprünglichen Welle in Richtung der Zylinderachse schwingt. Die Anzahl der stehenden Wellen ist bei begrenztem Tank dadurch gegeben, daß die stehende Welle die halbe Frequenz des schwingenden Erregers hat und gleichzeitig ein ganzes Vielfaches der stehenden Welle zwischen den Tankwänden sein muß.

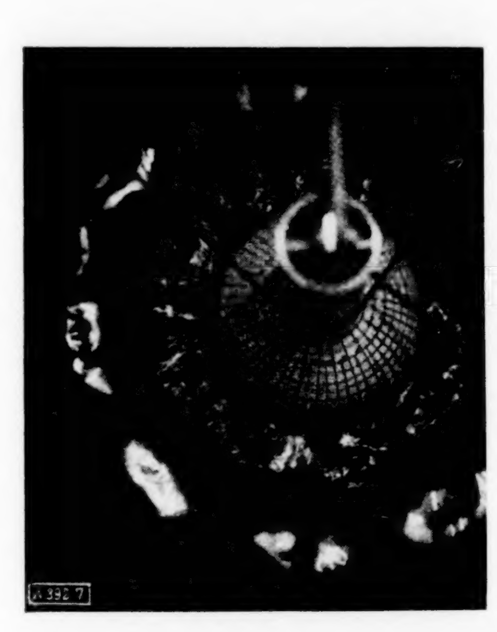

Abb. 7.


Abb. 8.

Um die Ursache des Wellenumschlags zu finden, habe ich zunächst verschiedene schwingende Körper, außer dem Zylinder auch die Platte und den Keil untersuchen lassen. Auch hier trat der Wellenumschlag ein. Wir erhalten also den Satz: Die Möglichkeit des Wellenumschlags hängt nicht von der Form des schwingenden Körpers ab. Daraufhin prüfte ich, ob die Echowirkung der Tankwand die Ursache sein könne. Ich ging mit dem Modell in einen sehr großen Wassertank; aber hier trat der Wellenumschlag ebenso ein, und zwar unabhängig von der Richtung, in der die Tankwände zur Zylinderachse liefen. Daraus ergibt sich der Schluß: Der Wellenumschlag hängt nicht von der Begrenztheit des Tanks ab. Nun sagte ich mir, daß wahrscheinlich die Begrenztheit des Modells in der Achsenrichtung die Ursache des Wellenumschlags sei. Denn die Rechnung, welche die laufende Welle ergibt, gilt nur für einen unendlich langen Zylinder. Die Modelle haben aber an ihren Enden einen singulären Punkt. Nun kann man keinen unendlich langen Zylinder herstellen, aber man kann einen unbegrenzten Zylinder machen, indem man den Zylinder zu einen Ring zusammenbiegt. Noch einfacher ist es, wenn man eine Kugel nimmt, die halb ins Wasser eingetaucht ist und vertikal schwingt. Diesen Versuch hat vor kurzem Herr Holstein im Institut für angewandte Mechanik zu Göttingen auf meine Veranlassung hin gemacht. Bei niederen Frequenzen entstehen ringförmige Wellen, die von der Kugel weglaufen. Steigert man nun die Frequenz, so erhält man Abb. 7. In der Mitte sieht man die Kugel, die mit einer Maßteilung versehen ist. Sie sendet gerade eine ringförmige Welle aus, deren Kamm aber bereits stark gekräuselt ist. Der voranlaufende Wellenring ist ebenfalls auf dem Bild zu sehen; er ist auch gekräuselt. Einen Augenblick später ist auch hier der Wellenumschlag eingetreten, wie dies aus Abb. 8 zu sehen ist. Wir haben sechs stehende Wellen, die jetzt radial laufen. Die ursprüngliche laufende Welle ist fast ganz verschwunden. Die Maßteilung der Kugel gestattet, die Größe der Welle auszuwerten. Auch bei der Kugel ist die Frequenz der stehenden Welle die Hälfte der Frequenz des Erregers. Wir kommen also zu dem Schlusse: Der Wellenumschlag hängt nicht von der Begrenztheit des Erregers ab.

Der Wellenumschlag muß nach diesen Versuchen eine rein hydrodynamische Ursache haben. Die umgeschlagene stehende Welle muß in den hydrodynamischen Differentialgleichungen mitenthalten sein, von denen bisher als Lösung nur die laufende Welle bekannt ist. Der kritische Punkt des Wellenumschlags hängt nach unseren Versuchen nicht nur von der Frequenz, sondern auch von der Amplitude des schwingenden Körpers ab. Besonders erstaunlich ist, daß die umgeschlagene stehende Welle senkrecht zu der ursprünglichen laufenden Welle steht. Leider kann ich hier noch keine Theorie des Wellenumschlags geben. Das Problem ist ein räumliches und deshalb besonders schwierig mathematisch zu behandeln. Trotzdem will ich meine bisherigen Versuchsergebnisse mitteilen, denn soviel ich weiß, ist noch nie über solche Umschlagserscheinungen berichtet worden. 392, 14

## 15. Über die Ermittlung der Rohreinlaufströmung aus den Navier-Stokesschen Gleichungen.

Von *G. Vogelpohl* in Berlin.

(Aus dem Institut für Technische Strömungsforschung an der Technischen Hochschule Berlin.)

Die Beobachtungen Gibsons über den Eintritt der Turbulenz im Kreisrohr[1]) gaben dem Verfasser Anlaß, von den Navier-Stokesschen Gleichungen ausgehend eine Behandlung der Rohreinlaufströmung zu versuchen. Die nichtlinearen Gleichungen sollen in der üblichen Weise gelöst werden, daß man, von einer brauchbaren Grundlösung als erster Näherung ausgehend, in der Bestimmungsgleichung für die zweite Näherung die quadratischen Glieder vernachlässigen kann.

In dem Vortrag wurde die Auffindung der Grundlösung behandelt, der Gedanke ist folgender: Betrachtet man den stationären Verlauf des Überganges von der geradlinigen Geschwindigkeitsverteilung bis zur Poiseuilleschen Parabel von einem Koordinatensystem aus, das sich mit der mittleren Geschwindigkeit $\bar{c}$ entlang der Rohrachse bewegt, so wird in diesem der Vorgang nichtstationär. Andererseits sind die radialen Komponenten der Geschwindigkeit klein gegenüber den achsialen, vernachlässigt man sie in erster Näherung, so ergibt sich zur Beschreibung des Vorgangs eine Gleichung vom Typ der Wärmeleitungsgleichung, in der das Druckglied als Störungsfunktion eingeht.

Daß die Möglichkeit nahegelegt wird, auf diesem Wege eine brauchbare Näherungslösung für die Geschwindigkeitsverteilung zu finden, zeigte ein vorgeführter Versuch, wie ihn Herr Prof. Föttinger in seinen Vorlesungen über Strömungsphysik an der T. H. Berlin zu bringen pflegt.

Liegt die Rohrachse in der $Z$-Richtung des Zylinderkoordinatensystems und macht man die Gleichung durch Einführung geeigneter Veränderlicher dimensionslos, so lautet sie

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial c}{\partial r},$$

wo zur Beschreibung des stationären Vorgangs in erster Näherung $t = z/\bar{c}$ gesetzt werden kann. Die Lösung der homogenen Gleichung kann in der Form $c = \sum\limits_k T_k \cdot J_0(\xi_k \cdot r)$ angesetzt werden, entwickelt man das Druckglied nach Besselschen Funktionen — man multipliziert mit $1 = 2 \sum\limits_k J_0(\xi_k \cdot r)/\xi_k \cdot J_1(\xi_k)$ —, so erhält man für $T_k$ eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung und für $c$ die Lösung

$$c = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ C_k \, e^{-\xi_k^2 t} - \frac{2}{\xi_k \, J_1(\xi_k)} \int_0^t \frac{\partial p}{\partial z} \, e^{-\xi_k^2 (t-\tau)} \, d\tau \right] J_0(\xi_k r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Hierin bedeuten $C_k$ als Integrationskonstanten die Koeffizienten der Entwicklung der zur Zeit $t = 0$ vorgegebenen Geschwindigkeitsverteilung nach Besselschen Funktionen erster Art. Ist das Druckgefälle als Funktion der Zeit gegeben, so ist die Berechnung von $c$ ohne weiteres möglich.

Die hier aufgeworfene Fragestellung erfordert dagegen, das Druckgefälle so zu bestimmen, daß die mittlere Geschwindigkeit $\bar{c}$ konstant bleibt, das führt auf die Volterrasche Integralgleichung erster Art

$$\bar{c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\xi_k^2} \left(1 - e^{-\xi_k^2 t}\right) + \int_0^t \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\xi_k^2} \cdot e^{-\xi_k^2 (t-\tau)} \, d\tau = 0,$$

[1]) Phil. Mag. 7. Reihe, Bd. 15 (1933), Nr. 99, S. 637/47. Bericht des Verf. über die Gibsonsche Arbeit nebst kritischen Anmerkungen in Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Bd. 4 (1933), Nr. 3, S. 154/55.

die sich nach einer von Whittaker angegebenen Methode[2]) lösen läßt. Man erhält

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial z} = 8 + 4\sum_{k=2}^{\infty} e^{a_k t} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2),$$

wo die $a_k$ die Wurzeln der Gleichung $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{x + \xi_k^2} = 1$ bedeuten, es ist $a_1 = 0$, $a_2 = -26.374$, $a_3 = -70.849$, $a_4 = -135.023$, $a_5 = 218.922$.

Für größere Werte von $k$ gilt näherungsweise $a_k = 4 - \xi_k^2$.

Einsetzen von (2) in (1) ergibt für $c$ Geschwindigkeitsverteilungen mit konstanter mittlerer Geschwindigkeit; sofern man das nichtstationäre Problem ins Auge faßt, handelt es sich um eine exakte Lösung der Navier-Stokesschen Gleichungen. Die Brauchbarkeit als erste Näherung für die Rohreinlaufströmung muß noch durch die Bestimmung der weiteren Näherungen erwiesen werden. 404, 15

## 16. Analytische Ausbildung von Schnelldampferformen.

Von *Georg Weinblum* in Berlin.

In einer früheren Arbeit[3]) habe ich gezeigt, wie man mit Hilfe des Michellschen Integrals, ausgehend von geeigneten Polynomen, Schiffsoberflächen geringsten Wellenwiderstandes ableiten kann. Die gewonnenen Resultate erstreckten sich nur auf größere Froudesche Zahlen $\mathfrak{F}$; an der unteren Grenze ($\mathfrak{F} \sim 0{,}30$) trat eine Streuung der Ergebnisse ein, welche aber nur auf eine Ungenauigkeit der durch die Ritzsche Methode bedingten Rechnungsverfahren zurückzuführen ist. Es wird hier deshalb das Gebiet der Froudeschen Zahlen von etwa 0,26 bis 0,32 durch direkte Auswertung des Integrals für verschiedene Schiffsformen eingehender untersucht; ich nenne diesen Bereich den der Schnelldampfergeschwindigkeit, die Ergebnisse gelten natürlich ebenso für andere Fahrzeuge mit einem nicht zu geringen Tiefgangsverhältnis.

Frühere rechnerische Untersuchungen haben in Übereinstimmung mit experimentellem Material erwiesen, daß zur Erzielung eines geringen Wellenwiderstandes bei diesen Geschwindigkeiten nur kleine Schärfegrade $\delta/\beta$ in Frage kommen; wir können daher den Kern unserer Aufgabenstellung dahin formulieren, daß wir für verschiedene Schiffslinien die Werte des Schärfegrades festzustellen suchen, welchen ein Minimum des Wellenwiderstandes entspricht. Diese Fragestellung ist jetzt praktisch noch wichtiger als früher, weil durch die Reduktion von Baugewichten Beschränkungen im Völligkeitsgrad aus anderen Gründen immer mehr wegfallen.

Zunächst werden einige Spantflächenkurven von Taylor durch Polynome angenähert und der zugehörige Wellenwiderstand berechnet; in guter Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen zeigt sich, daß für die gewählte Form das Widerstandsminimum bei einem Schärfegrad von etwa **0,52** erreicht wird. In ähnlicher Weise wird die Abhängigkeit des Widerstandes vom Schärfegrad für eine Kurvenschar $\eta = 1 - a_2\,\xi^2 - a_3\,|\xi|^3 - a_4\,\xi^4$ untersucht. Schreiben wir die Bedingung $\left|\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right|_{\xi=1} = 0$ vor, so fällt der Widerstand bis zu einem Schärfegrad von $\sim$ **0,48**; mit zunehmender Völligkeit wächst der Widerstand außerordentlich schnell, was aber noch einer experimentellen Bestätigung bedarf. Machen wir dagegen den Eintrittswert $-\left|\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right|_{\xi=1} = 1$, so werden diese Schiffslinien für höhere Schärfegrade und Froudesche Zahlen anscheinend sehr brauchbar, dagegen versagen sie allgemein für kleinste Völligkeiten und geringere Geschwindigkeiten; das Widerstandsminimum ist bei einem Schärfegrad von zirka **0,54** bei nicht zu kleinen Froudeschen Zahlen zu erwarten.

Die Rechnung zeigt, daß fast alle Schnelldampfer vom Standpunkt des Widerstands aus zu völlig ausgeführt sind. Es ist noch nicht gelungen, mit diesen und ähnlichen Spantflächenkurven im betrachteten Geschwindigkeitsgebiet rechnerisch bessere Ergebnisse, als sie den Standardschiffen Taylors entsprechen, zu erreichen. Man wird daher die Schnelldampfer meist mit einem Bugwulst versehen; als praktische untere Grenze für den Schärfegrad ist dann etwa 0,54 zu nennen, welche durch eine völligere Ausbildung des Hinterschiffes noch etwas überschritten werden kann. Der Kreis der möglichen Formen ist mit dieser Untersuchung nicht erschöpft; vor allem soll eine aussichtsreiche Kombination der günstigsten hier ermittelten Form mit einem Bugwulst untersucht werden. Aber es ist kaum zu erwarten, daß wesentlich neue positive Ergebnisse mit anderen Linien zu erreichen sind. 403, 16

[2]) Proc. Roy. Soc. London, Series A, **94**, 1918, S. 367 ff.
[3]) Schiffe geringsten Widerstandes, Int. Kongr. f. Mech., Stockholm 1930.

# 17. Berechnung von Achsialturbinen durch Streckenprofilgitter.

Von *Fritz Weinig* in Berlin.

(Aus dem Institut für Technische Strömungsforschung, Technische Hochschule Berlin.)

Der Berechnung achsial durchströmter Turbomaschinen legt man die ebene Strömung durch ein geradachsiges Gitter aus Schaufelprofilen zugrunde. Im Grenzfall sehr enger Teilung ist die Stromfadentheorie, im Grenzfall sehr weiter Teilung die einfache Tragflügeltheorie anwendbar. Eine Verbindung von der Tragflügeltheorie zur Stromfadentheorie stellt der Kutta-Joukowskische Satz dar. Mit $\mathfrak{w}_x = \frac{\mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2}{2}$ (Abb. 1) wird die auf ein Profilstück der seitlichen Ausdehnung $dr$ ausgeübte Kraft

$$P = \varrho \cdot \Gamma \cdot w \cdot dr \qquad (\varrho = \text{Dichte}), \quad (\Gamma = \text{Zirkulation}).$$

Hierbei ist

$$\Gamma = (w_{u_2} - w_{u_1})\, t. \quad P \text{ steht senkrecht auf } \mathfrak{w}_x.$$

Eine Möglichkeit, weitere Lücken zwischen Stromfadentheorie und Tragflügeltheorie auszufüllen, ist die der gleichwertigen Streckenprofilgitter. Es läßt sich zeigen, daß es zu jedem Gitter aus beliebigen Profilen ein Gitter aus Strecken als Profilen gibt, welches ihm bezüglich der ausgeübten Strömungskräfte bzw. bezüglich der Ablenkung der Strömung gleichwertig ist. Damit zerfällt praktisch unsere Aufgabe in zwei Teile: erstens die Strömungskräfte bzw. die Ablenkung der Strömung durch ein Streckenprofilgitter zu berechnen, zweitens das zum gegebenen beliebigen Profilgitter gleichwertige Streckenprofilgitter zu bestimmen.

Für die Strömung durch Streckenprofilgitter findet man mit Benutzung der Methoden der konformen Abbildung

$$\Gamma = k\,(t/l, \beta) \cdot \pi \cdot \sin \delta.$$

$k\,(t/l, \beta)$ (Abb. 2) stellt also das Vielfache der Kraft dar, welche ein Streckenprofil im Gitterverbande unter gleicher Anstellung $\delta = \beta - \sigma$ (Abb. 1) erfährt wie ein alleinstehendes Streckenprofil.

Statt mit den Kräften kann man auch mit den Strömungsrichtungen (Abb. 1) rechnen:

$$\frac{\operatorname{tg}\sigma_2 - \operatorname{tg}\sigma_1}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\sigma_1} = \frac{2q}{1+q}. \qquad \text{Hierbei ist} \quad q = \frac{k}{\frac{2}{\pi}\,\frac{t}{l}\,\frac{1}{\cos\beta}} \quad \text{(Abb. 3).}$$

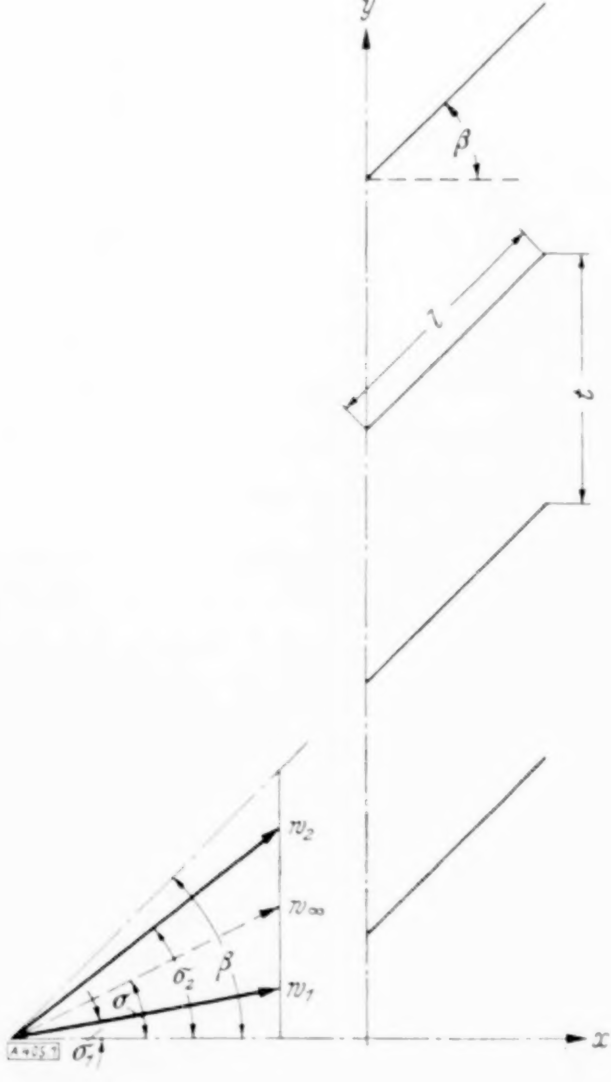



Abb. 1.

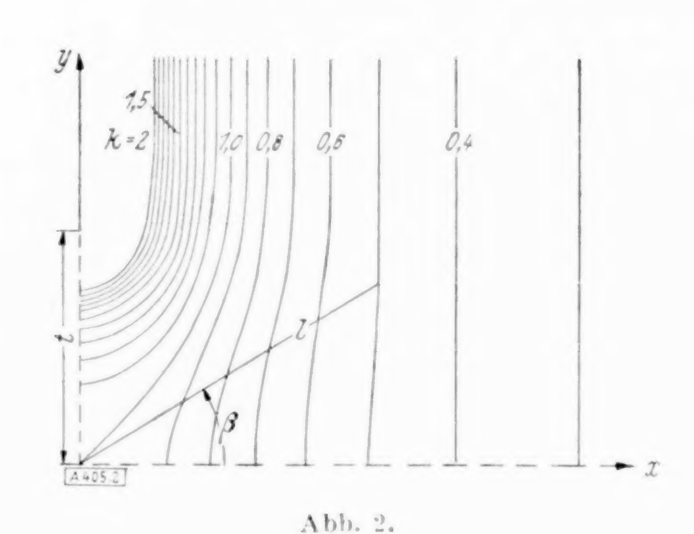



Abb. 2.

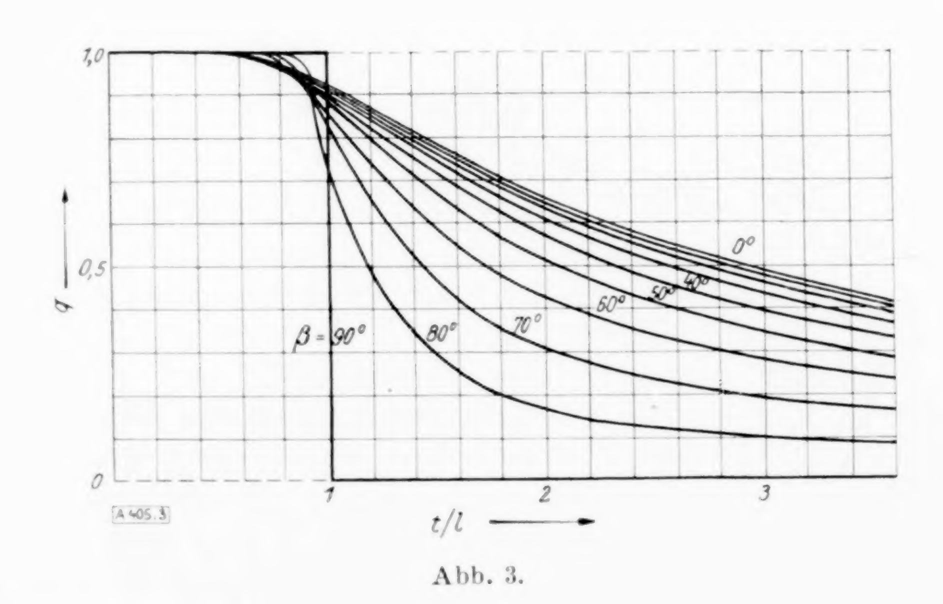



Abb. 3.

Ein Gitter aus beliebigen Profilen läßt sich immer auf ein Gitter aus Streckenprofilen konform abbilden. Eindeutig wird diese Abbildung, wenn man vorschreibt, daß die Teilung die gleiche sein soll und daß die Zusammenflußpunkte sich entsprechen. Im Unendlichen vor und hinter dem Gitter finden beim Übergang aus der einen Strömungsebene in die andere weder Verzerrungen noch Drehungen statt. Diese sind z. B. auch nicht bei der Abbildung der ablenkungsfreien bzw. querkraftfreien Strömung vorhanden: Richtung und Geschwindigkeit dieser Strömung sind in beiden Ebenen im Unendlichen die gleichen. Ist dies aber der Fall, so sind auch bei anderen entsprechenden Strömungen die Richtungen und Geschwindigkeiten beim Zufluß bzw. beim Abfluß einander entsprechend gleich. Die eindeutige Abbildung ist also hinreichende Voraussetzung für die gleiche Ablenkung und somit für gleiche Strömungskräfte beim Streckenprofilgitter wie beim Ausgangsgitter, d. h. also für die Gleichwertigkeit.

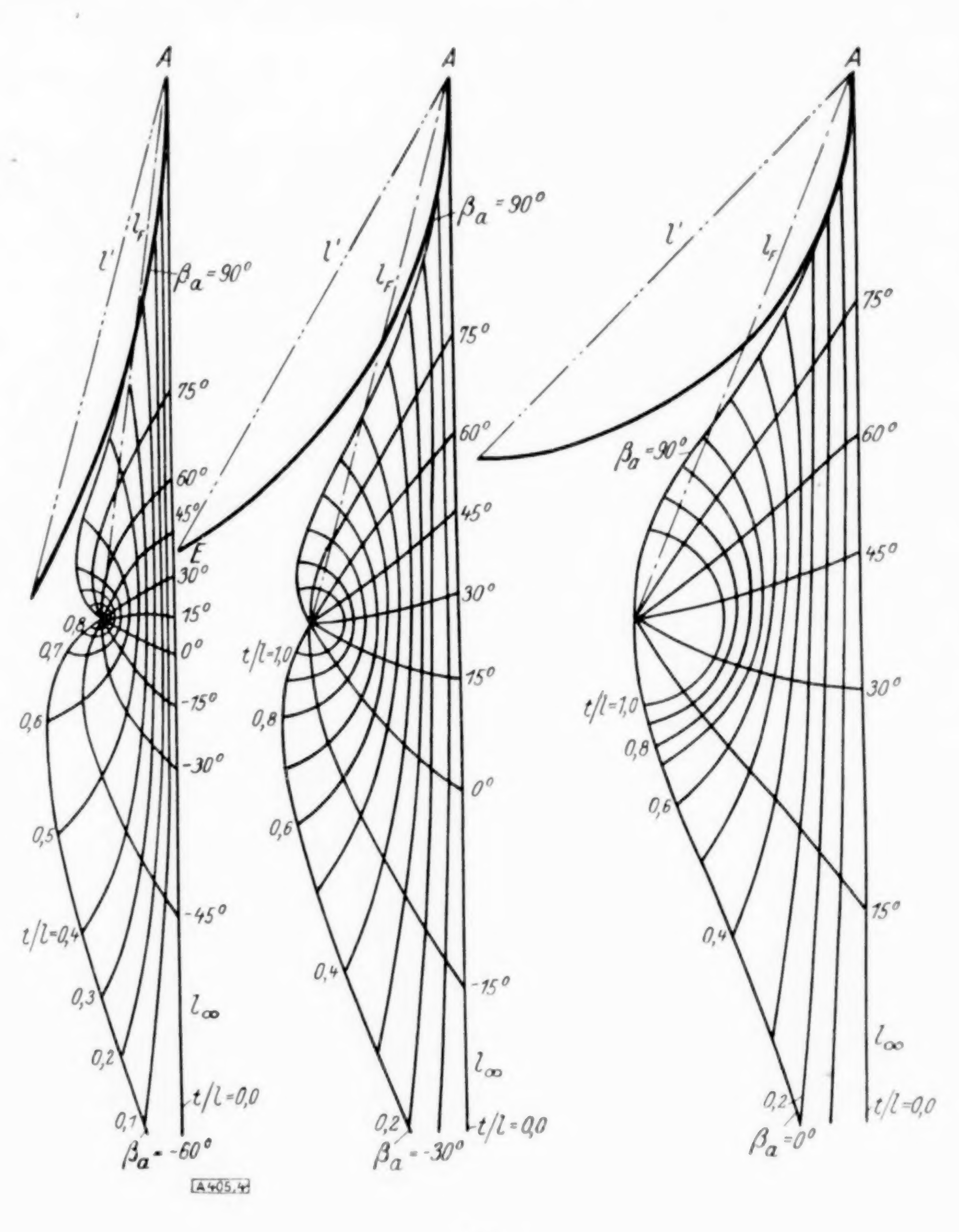



Abb. 4.

In den Grenzfällen ist die Bestimmung des zu einem beliebigen Profilgitter gleichwertigen Streckenprofilgitters ganz einfach. Bei sehr großer Teilung entspricht einem Profil die gleiche Strecke im Gitterverbande, die ihm auch alleinstehend entsprechen würde. Bei sehr enger Teilung ist die Abflußrichtung durch das Austrittsende gegeben und von der Zuströmrichtung unabhängig, somit die Richtung der gleichwertigen Streckenprofile die Richtung der Austrittsenden. Die Länge wird gegeben durch den Potentialunterschied zwischen Eintritts- und Austrittsende, gemessen in der Abflußgeschwindigkeit.

In der Nachbarschaft dieser Grenzfälle lassen sich die gleichwertigen Streckenprofilgitter durch gewisse Näherungsbetrachtungen bestimmen. Als Beispiel seien hier die Ergebnisse für Gitter aus Kreisbogenprofilen mit Zentriwinkeln 30°, 60°, 90° mitgeteilt (Abb. 4).

Man erkennt aus diesen Ergebnissen, daß schon bei nicht besonders kleinen Wölbungen und nicht besonders großen Teilungen die Gitterprofile praktisch meist genau genug durch die gleiche Strecke ersetzt werden können, wie das alleinstehende Profil. Solche Verhältnisse liegen aber gerade sehr häufig vor bei achsial durchströmten schnellaufenden Turbomaschinen. Im allgemeinen nicht zu vernachlässigen ist aber der Gittereinfluß, der durch den Koeffizienten $k$ wiedergegeben wird.

# KLEINE MITTEILUNGEN

**Zeichnerische Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung mittels Funktionsteilungen.** 1. Bei der zeichnerischen Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung kommt es darauf an, die Ebene innerhalb des Zeichenbereichs mit einer graphischen Tabelle zu bedecken, so daß an jeder Stelle die durch $dy:dx = f(x, y)$ gegebene Richtung eingetragen werden kann. Beim Rungeschen Isoklinenverfahren müssen die Kurven $f(x, y) = \text{const}$ gezeichnet werden. Die praktische Ausführung scheitert nicht selten an der Schwierigkeit, die die Berechnung dieser Kurven zuweilen bietet. Es sind daher mehrere Wege erdacht, wie man die gegebene Funktion in vereinfachter Form verwenden kann. Dies Ziel erstrebt auch das folgende Verfahren.

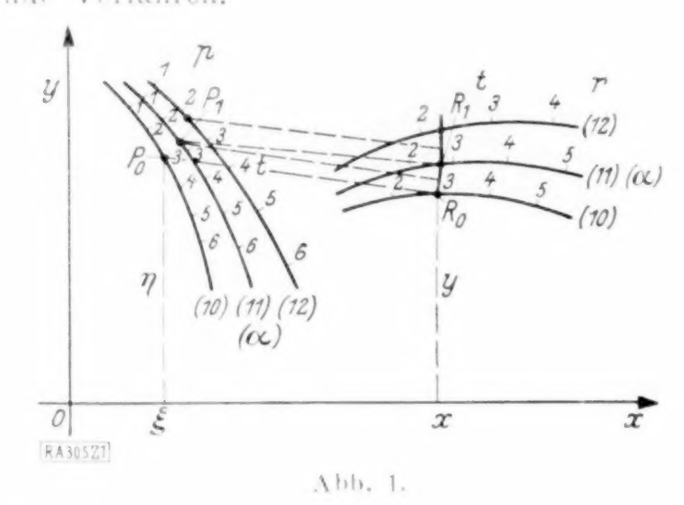



Abb. 1.

Über die Funktion $f(x, y)$ sollen die bei zeichnerischen Lösungen üblichen Voraussetzungen gelten.

2. Die Richtungstabelle soll in folgender Weise hergestellt werden. Es werden (Abb. 1) zwei Kurvenscharen bestimmt, die Polkurven $p$ und die Richtkurven $r$, und durch einen Parameter $\alpha$ eindeutig einander zugewiesen. Je zwei zugeordnete Kurven erhalten Funktionsteilungen,

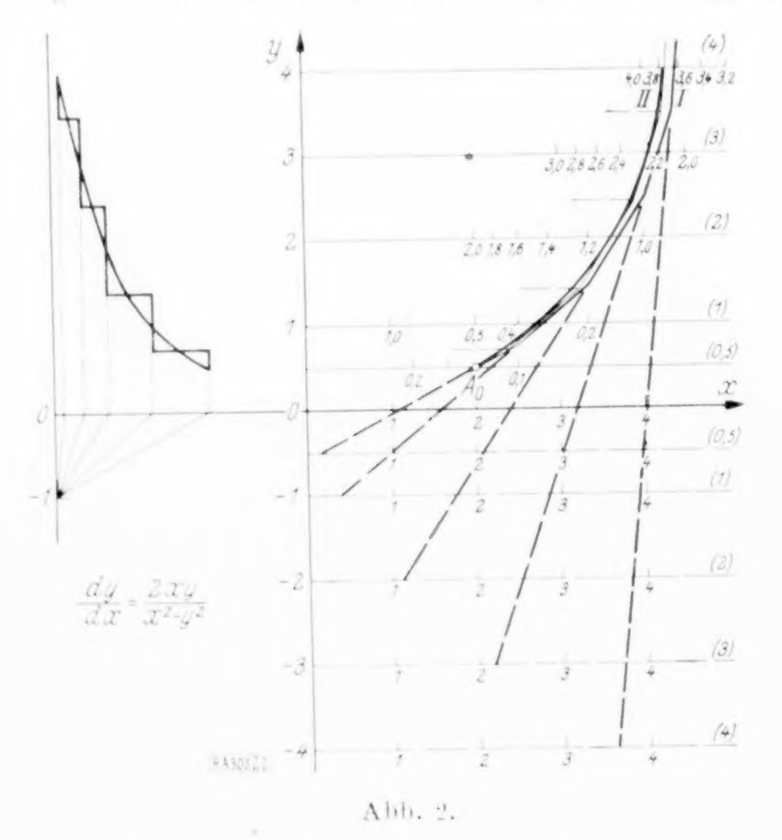



Abb. 2.

deren Punkte durch einen zweiten Parameter $t$ eindeutig aufeinander bezogen sind. Die Parameter $a$ und $t$ sind so bestimmt, daß die Verbindungsgerade $P_i R_i$ entsprechender Punkte entweder Tangente oder Normale der Integralkurve im Punkte $R_i$ ist. Die Polkurvenschar sei

$$\xi = \varphi(\alpha, t); \quad \eta = \psi(\alpha, t)$$

und die Richtkurvenschar

$$x = r(a, t); \quad y = s(a, t),$$

dann muß sein:

$$\frac{y - \eta}{x - \xi} = f(x, y) \quad \text{oder} \quad \frac{x - \xi}{y - \eta} = -f(x, y);$$

d. h. die vier Funktionen $\varphi$, $\psi$, $r$, $s$ müssen eine der Bedingungen erfüllen:

$$\frac{s(a, t) - \psi(a, t)}{r(a, t) - \varphi(a, t)} = f[r(a, t);\ s(a, t)]$$

oder

$$\frac{r(a, t) - \varphi(a, t)}{s(a, t) - \psi(a, t)} = -f[r(a, t);\ s(a, t)].$$

Im allgemeinen sind daher drei der Funktionen frei wählbar; die vierte ist dann bestimmt. Durch geschickte Auswahl muß man versuchen, möglichst einfache Kurven und Teilungen zu finden. Nur wenn das gelingt, ist eben das Verfahren anzuwenden.

3. Man zeichnet nun so. $R_0$ sei der gegebene Anfangspunkt. Verbindet dann $P_0R_0$ zwei gleichkotierte Punkte zugeordneter $\alpha$-Kurven, so ist $P_0 R_0$ Tangente bzw. Normale im Punkte $R_0$. In beiden Fällen zeichnet man die Tangente[1]) durch $R_0$ bis etwa zur Mitte benachbarter Richtkurven. Durch diese Mitte zieht man die nächste Tangente so, daß $P_1 R_1$ wieder zwei Punkte gleicher Kote zugeordneter $\alpha$-Kurven verbindet. So fährt man fort.

4. Die erste Annäherung verbessert man durch sukzessive Approximation, wie es Runge zuerst angegeben hat. Man integriert (Abb. 2) am besten mittels Stufenkurve nach dem Tangentenverfahren. Aber es ist zu beachten, daß die Berührungspunkte auf den Tangenten der verbesserten Annäherung nicht in den Schnittpunkten mit den Richtkurven liegen. Um weiter zu verbessern, muß man die zweite Annäherungskurve wirklich zeichnen und die neue Differentialkurve mit Hilfe von den neuen Tangenten in den Schnittpunkten der zweiten Annäherungskurve mit den Richtkurven konstruieren. Das ist etwas umständlicher als beim Isoklinenverfahren.

5. Am wichtigsten dürfte der Sonderfall sein, wenn Polkurven und Richtkurven als Parallelen zu den Achsen gewählt werden. Liegen sie z. B parallel zur $y$-Achse und arbeitet man mit Tangenten so wird man setzen: $\alpha = x$; $y = s(x, t)$; $\xi = \varphi(x)$; $\eta = \psi(x, t)$, und

$$\frac{s(x, t) - \psi(x, t)}{x - \varphi(x)} = f[x;\ s(x, t)].$$

Hier kann man im allgemeinen nur nach $s$ oder $\psi$ auflösen. Ist $\varphi$ unbekannt, so kommt die Bedingung hinzu, daß $\varphi$ eine Funktion von $x$ allein werden muß. Indem man besonders einfache Kurven und Teilungen zu weitgehend vorschreibt, lassen sich überhaupt durch solche Bedingungen umgekehrt die Differentialgleichungen bestimmen, die besonders einfach lösbar sind.

6. Schreibt man weiter vor, daß alle Polkurven zusammenfallen sollen und wählt die $y$-Achse als einzige Polkurve, so bleibt

$$\frac{s(x, t) - \psi(t)}{x} = f[x;\ s(x, t)].$$

[1]) Ist $P_0 R_0$ Normale, so wird man, falls die Richtkurven genügend dicht liegen, die Tangente durch einen kleinen Kreisbogen um $P_0$ mit dem Radius $P_0 R_0$ ersetzen dürfen, so daß man besonders einfach nur mit dem Zirkel arbeitet. Vgl. E. Stübler: Die Zahnform des Stirnrades mit längster Lebensdauer. Der Betrieb. Jahrg. 1920/21, Nr. 14.

Hier kann noch $\psi$ beliebig gewählt werden. Man hat es jetzt mit dem Isopolenverfahren von Czuber-Veithen aber in andrer Anordnung zu tun, die vielleicht genauere Ergebnisse liefert[2]).

7. In Abb. 2 ist ein Beispiel durchgezeichnet:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Als Polkurven sind metrisch geteilte Parallelen zur $x$-Achse gewählt: $\xi = t$; $\eta = -y$. Die Richtkurven sind auch parallel zur $x$-Achse angenommen, und zwar $y = a$, so daß bei Zeichnung mittels Tangenten aus $\frac{y - \eta}{x - t} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ die Teilung der Richtkurven $x = \frac{y^2}{t}$ folgt.

Ist der Anfangspunkt $A_0$ (2; 0,5), so hat die Integralkurve die Gleichung: $x^2 + y^2 - 8{,}5\,y = 0$. Die erste Verbesserung berührte bereits diesen Kreis zeichnerisch genau.

Frankfurt a. M. R. Neuendorff. 305

**Über die Ableseunsicherheit an ungleichmäßig geteilten Skalen (insbesondere am Rechenschieber).** Auf einer gleichmäßigen Skala sind die Werte $\xi = 0, = 1, = 2, = 3$ u. s. f. in gleichbleibenden Abständen aufgetragen; eine ungleichmäßige Skala entsteht dadurch, daß man die Werte $\xi = f(x)$ aufträgt. Je nach der Wahl von $f$ entsteht dann eine ganz bestimmte Skala. — Der Zahl $x_1$ entspricht ein ganz bestimmter Teilstrich $\xi_1$ der Skala, der Zahl $x_2$ entspricht $\xi_2$. Je weiter zwei aufeinanderfolgende Teilstriche $\xi_1$ und $\xi_2$ auseinander liegen, desto genauer kann man das Intervall durch Zwischenteilstriche unterteilen, desto genauer kann man Bruchteile zwischen $x_1$ und $x_2$ schätzen, desto kleiner ist also die größte mögliche Abweichung oder Ableseunsicherheit $u_r$ zwischen dem an der Skala abgelesenen Werte und dem richtigen (der etwa durch Rechnung gefunden werden kann). Diese Unsicherheit $u_r$ ist offenbar umgekehrt proportional dem Abstand zwischen den Teilstrichen $\xi_1$ und $\xi_2$, der auf den Zahlenabstand $x_1 \div x_2$ bezogen ist:

$$u_r = \pm \frac{1}{\frac{\xi_2 - \xi_1}{x_2 - x_1}} = \pm \frac{1}{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}.$$

Variiert man nun $x$ und trägt zu jedem $x$ das entsprechende $u_r$ als Kurve auf, so erhält man die Verteilung der Ableseunsicherheiten längs der Skala, das heißt die relative Unsicherheit für jedes Intervall der Skala. Die einzelnen $u_r$ sind dabei Mittelwerte für die zugehörigen Intervalle. Wählt man nun diese sehr klein, so erhält man statt des Mittelwertes die Unsicherheit an einem bestimmten Punkt. Man muß also $x_2$ zu $x_1$ werden lassen, d. h. vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten übergehen und daher schreiben

$$\lim u_r = \pm \frac{1}{\frac{d\,f(x)}{dx}} \quad \text{für } x_2 = x_1.$$

In abgekürzter Schreibweise bleibt das Wort lim fort. Man sieht, daß die relative Unsicherheit unmittelbar gleich ist dem reziproken Differentialquotienten derjenigen Funktion, nach der die Skala hergestellt wurde. Die prozentuale Unsicherheit $u_p$ wird erhalten, wenn $u_r$ auf $x$ bezogen, d. h. durch $x$ dividiert wird. $u_p$ ist außerdem noch von der Länge abhängig, in der die ganze Skala aufgetragen wird. Das wird durch einen Proportionalitätsfaktor $k$ zum Ausdruck gebracht; natürlich steckt in diesem Faktor auch ein in gewissen Grenzen willkürlicher Anteil, je nachdem wie genau man zwischen zwei aufeinanderfolgenden Teilstrichen ablesen zu können glaubt.

$$u_p = \pm \frac{k \cdot u_r}{x} = \pm \frac{k}{x \cdot \frac{d\,f(x)}{dx}}.$$

Bezeichnet nun $u_1$ die absolute Ableseunsicherheit am Punkte $x_1$ einer ganz bestimmten Skala, so ist die prozentuale Unsicherheit unmittelbar gegeben durch:

$$u_{p\,1} = \frac{u_1}{x_1}.$$

$u_p$ ist andererseits durch die obige Gleichung bestimmt; daraus folgt:

$$\frac{k \cdot u_{r\,1}}{x_1} = \frac{u_1}{x_1}; \quad k = \frac{u_1}{u_{r\,1}} = \frac{\text{absol. Unsicherheit}}{\text{relat. Unsicherheit}}.$$

Es folgt das Beispiel der logarithmischen Teilung, also der Skala des Rechenschiebers. Sie entsteht durch die Funktion $\xi = f(x) = \ln x$. Die relative Ableseunsicherheit $u_r$ ist dann gegeben durch die Gleichung:

$$u_r = \pm \frac{1}{\frac{d\,f(x)}{dx}} = \pm \frac{1}{\frac{d \ln x}{dx}},$$

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}, \qquad u_r = \pm x.$$

Wählt man statt des natürlichen Logarithmus (ln) den Briggschen, so ändert sich $u_r$ nur um die Konstante ln 10, die in $k$ einbezogen werden kann. Die prozentuale Unsicherheit $u_p$ ist

$$u_p = \pm k \cdot \frac{u_r}{x} = \pm k.$$

Das bedeutet, daß die prozentuale Unsicherheit beim Ablesen an einer logarithmischen Skala über die ganze Länge der Skala dieselbe ist.

Für die untere Skala eines 25 cm-Rechenschiebers bestimmt sich $k$ folgendermaßen: Der Zwischenraum zwischen der 1,0 und der 1,1 ist durch 9 Teilstriche unterteilt, mit deren Hilfe man die Zehntel des Intervalls und auch noch die halben Zehntel sicher ablesen kann. Die absolute Unsicherheit $u_1$ beträgt daher an dieser Stelle $\pm \frac{1}{2}$ eines halben Zehntels des Teilstückes $1{,}1 - 1{,}0 = \pm 0{,}0025$; denn $\frac{1}{2} \cdot 0{,}05 \cdot (1{,}1 - 1{,}0) = 0{,}0025$,

$$u_1 = \pm 0{,}0025 \text{ und mit } u_{r\,1} = x_1 = 1$$

wird erhalten:

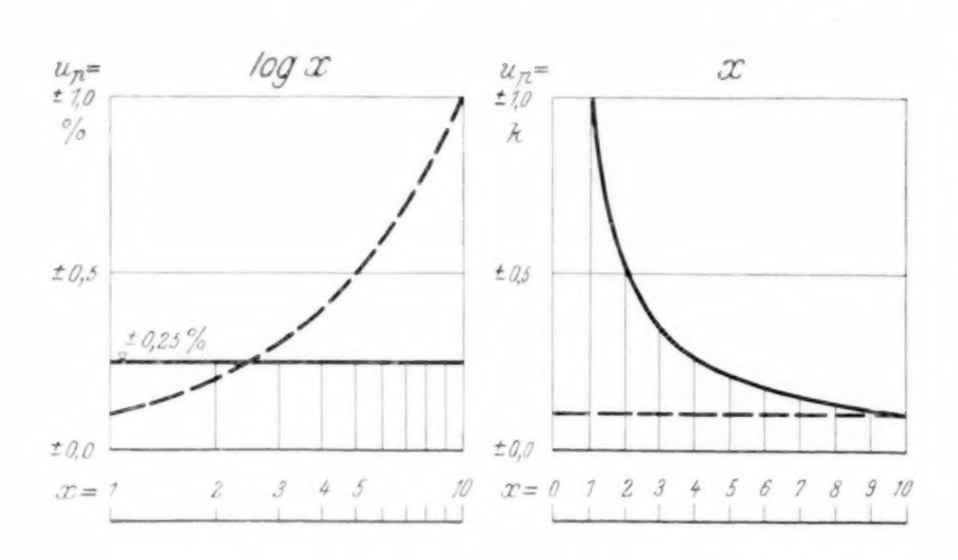
$$k = \frac{u_1}{u_{r\,1}} = \pm 0{,}0025 = \pm 0{,}25\,\%.$$

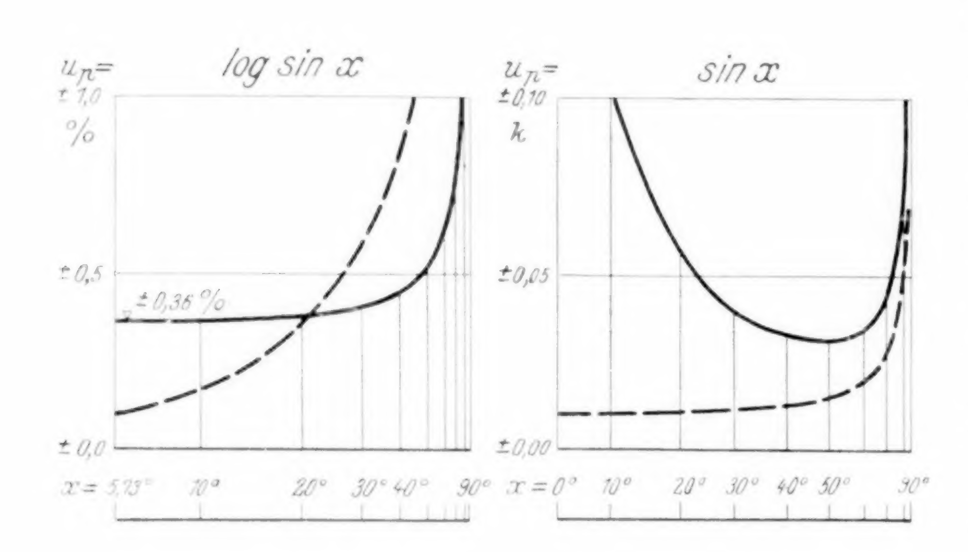
Die prozentuale Ableseunsicherheit ist dann

$$u_p = k \cdot \frac{u_r}{x} = k \cdot \frac{x}{x} = \pm 0{,}25\,\%.$$

Streng genommen beeinflußt nicht nur die Größe der Intervalle die Ableseunsicherheit, sondern auch

[2]) E. Czuber: Beitrag zur graphischen Integration der linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung. Zeitschrift für Mathematik u. Physik. Bd. 44, 1899. — K. Leifhold: Über die zeichnerische Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung nach dem Isopolen- und Strahlkurvenverfahren. Diss. Kiel 1922.



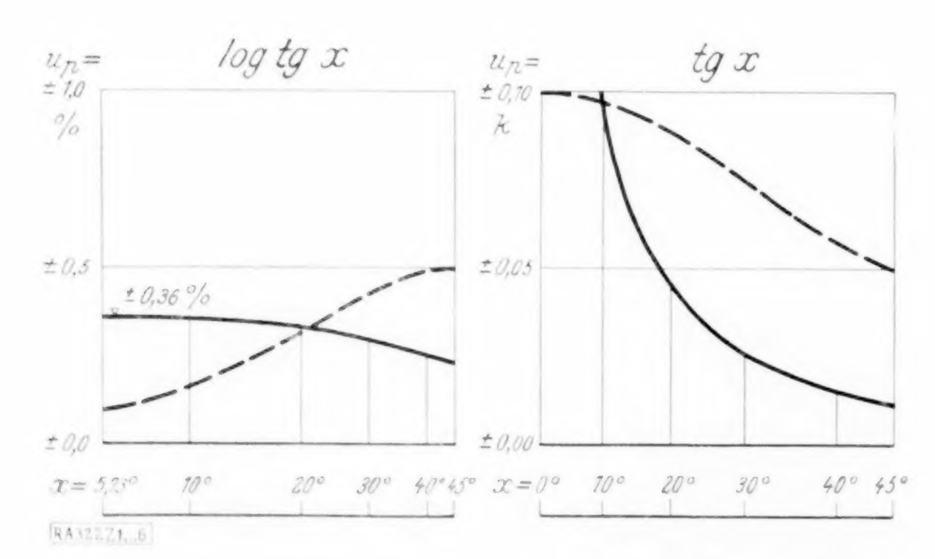




Abb. 1 bis 6.

die Zahl der Zwischenteilstriche; so wird man zwischen den Teilstrichen 1.9 und 2.0 des Rechenschiebers besser ablesen können als zwischen 2,0 und 2,1, trotzdem die Teilstücke fast gleichlang sind. Dieser Umstand äußert sich derart, daß an die Stelle der stetigen Kurve, die die Ableseunsicherheit darstellt, ein treppenförmiger Linienzug tritt, der allemal dort einen Sprung aufweist, wo sich die Art der Unterteilung ändert.

Auf diese Weise sind noch einige andere Skalenarten durchgerechnet worden, und zwar für folgende Funktionen: $x$, sin $x$, tan $x$ und deren Logarithmen. Der Gang der Rechnung ist an Hand des gegebenen Beispieles so einfach daß er hier nicht wiedergegeben werden soll. Die Ergebnisse sind in der Abbildung graphisch dargestellt. Die prozentualen Ableseunsicherheiten sind als ausgezogene Linien aufgetragen, die gestrichelten geben die relativen wieder. Auf die ersten bezieht sich die Bezifferung der senkrechten Achsen, während bei den letzten der Maßstab gleichgültig ist. — Für die gleichmäßige Skala ($x$) ist selbstverständlich $u_r$ konstant, während $u_p$ hyperbolisch abnehmen muß. Die einfache logarithmische Skala log ($x$) hat die angenehme Eigenschaft, daß $u_p$ konstant ist, während $u_r$ gradlinig zunimmt. (Diese grade Linie erscheint in der Darstellung verzerrt als Kurve, weil sie über einer ungleichmäßigen Skala als Abszissenachse aufgetragen ist, weil $u_r$ also nicht in Abhängigkeit von $x$, sondern von $\xi$ aufgetragen ist). Der Logarithmus hat ferner ganz allgemein die Eigentümlichkeit, die Unendlichkeitsäste der linken Hälften der $u_p$-Kurven von nicht logarithmischen Funktionen zum Verschwinden zu bringen (vgl. die 3 rechts stehenden Abb. $x$, sin $x$, tg $x$ mit den 3 links stehenden, deren Logarithmen). Die Darstellung der Null ist im logarithmischen Maßstab natürlich nicht möglich. Daß die Kurve log sin $x$ auf der rechten Seite ins Unendliche geht (ebenso wie sin $x$) leuchtet ein: Jeder, der mit dem Rechenschieber rechnet, weiß, daß zwischen 80° und 90° eine Ablesung kaum noch möglich ist.

Derartige Überlegungen können von Nutzen sein, wenn es sich darum handelt, eine graphische Tafel (ein Nomogramm) zu entwerfen, von der eine bestimmte Genauigkeit verlangt wird, oder wenn man sich von der Zulässigkeit der Anwendung einer vorhandenen Tafel überzeugen will, um vielleicht einen Zulässigkeitsbereich abzugrenzen. Ebenso kann man durch graphische Auftragung der relativen und der prozentualen Unsicherheit einen Anhalt darüber gewinnen, wo man zweckmäßig mit dem Maßstab der Tafel oder der Skala wechselt.

Aachen. O. Wilski. 322

# BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die VDI-Buchhandlung Berlin NW 7, Ingenieurhaus, zu beziehen.)

Dr. GERHARD **KOWALEWSKI**, o. ö. Prof. an der Technischen Hochschule Dresden. Interpolation und genäherte Quadratur. Eine Ergänzung zu den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung. Verlag B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1932. V + 146 S. mit 10 Fig. im Text. Preis geb. 9,60 M.

Dieses kleine Büchlein dient nicht wie andere bekannte Werke über Interpolation (z. B. das von Tiele oder das von Steffensen) in erster Linie den Bedürfnissen des Rechners, der die Interpolation als Hilfsmittel bei irgendwelchen Aufgaben verwendet. Sein Ziel ist vielmehr, einige sehr hübsche und für die praktische Anwendung mitunter wertvolle Eigenschaften der Interpolation durch Polynome abzuleiten und ins rechte Licht zu setzen. Obwohl viel von dem Vorgebrachten schon aus der klassischen Literatur stammt, findet man es weder in den obenerwähnten Spezialwerken noch in den üblichen Lehrbüchern der höheren Analysis. Es ist sicher, daß von dieser Veröffentlichung neue Anregungen für die Behandlung der Interpolation und der mechanischen Quadratur in Vorlesungen und Lehrbüchern ausgehen werden.

PHILIPP **FRANK**, Prof. a. d. Deutschen Universität in Prag. Das Kausalgesetz und seine Grenzen. Bd. 6 der Schriften zur

wissenschaftlichen Weltauffassung, herausgeg. v. Ph. Frank und M. Schlick. Verlag Jul. Springer. Wien 1932. XV + 308 S. mit 4 Abb. Preis 18.60 M.

Der Wunsch, abstrakte Gedankengänge in konsequenter Weise bis zu Ende zu durchlaufen, ist heute weniger verbreitet denn je. Daher wird man das Franksche Buch als wenig zeitgemäß bezeichnen müssen (allerdings ist mitzuteilen, daß eine französische Übersetzung in Vorbereitung ist). Frank verfolgt den Kausalitätsbegriff, dessen wissenschaftliche Fassung im engsten Zusammenhang mit den Grundlagen der klassischen Mechanik steht, bis in seine letzten Quellen zurück, so weit, daß sich sein Inhalt fast aufzulösen scheint. Aber wie man die Existenz eines Flusses nicht leugnen kann, weil er bloß aus dem Wasser aller seiner Quellflüsse und Zuflüsse besteht, so tritt hier aus der äußersten Zergliederung das komplexe Bild von dem, was die Kausalitätsvorstellung für die gedankliche Erfassung der Welt leistet, mit voller Entschiedenheit zutage. Wer den Wunsch hat, durch eigenes Nachdenken zur inneren Klarheit über die Grundfragen der heutigen Quantenphysik und ihren Zusammenhang mit allen übrigen Wissenschaftsgebieten zu gelangen und wer dabei auch die Entschlossenheit besitzt, vor keinem Bruch mit gewohnten, liebgewordenen Vorurteilen zurückzuschrecken, der wird in dem Frankschen Buch einen ausgezeichneten Führer finden. Sein voller Wert aber wird sich nach Ansicht des Referenten erst in der Zukunft erschließen, wenn die heute so stürmische Entwicklung der Physik an einem Ruhepunkt angelangt sein wird, wo das Interesse für eine theoretische Befestigung der Grundlagen wieder stärker ist.

Prof. Dr. MAX **PLANCK**, Wege zur physikalischen Erkenntnis. Reden und Vorträge. Leipzig 1933, S. Hirzel Verlag. IX + 280 S. Preis geb. 8 M.

Aus der früheren Sammlung „Physikalische Rundblicke“ hat der berühmte Verfasser die vier wichtigsten Abschnitte, vor allem den Nobel-Vortrag von 1920, herübergenommen und durch Hinzufügung von sieben neueren Arbeiten ein Buch von schöner Abrundung und Geschlossenheit geschaffen. Folgende sind die Themen der neuen Stücke: Kausalgesetz und Willensfreiheit. Vom Relativen zum Absoluten. Physikalische Gesetzlichkeit. Das Weltbild der neuen Physik. Positivismus und reale Außenwelt. Die Kausalität in der Natur. Ursprung und Auswirkung wissenschaftlicher Ideen. Jeder dieser Vorträge ist ein Musterstück klarer, formvollendeter Rede, die in gerader Bahn mit einer gewissen unerschütterlichen Ruhe auf ihr Ziel zustrebt und den Hörer, auch wenn er aus mannigfachen Gründen zu widerstreben sucht, in ihren Bann zieht. Alle Probleme scheinen sich von der angenommenen Grundeinstellung aus, die den Positivismus ausdrücklich ablehnt, ohne ihm im wesentlichen sehr fern zu stehen, fast mühelos und ohne Zwang zu lösen. Aber, auch wenn man unter der glatten Oberfläche Untiefen und Klippen zu sehen meint, wird man dem Autor den Dank nicht versagen, auf den er reichlich Anspruch hat: den Dank dafür, daß er uns in so freigiebiger Weise an den Früchten seines reichen Forscherlebens Anteil nehmen läßt.

Mises. 411

Dr. phil. Dr.-Ing. AUG. **FÖPPL** †, Prof. a. d. Techn. Hochschule München, Geh. Hofrat. Vorlesungen über Technische Mechanik. Vierter Band. Dynamik. 8. Aufl. Bearb. v. Dr.-Ing. A. BUSEMANN-Dresden, o. Prof. Dr. Ludw. FÖPPL-München und a. o. Prof. Dr.-Ing. O. FÖPPL-Braunschweig. VIII + 448 S. m. 114 Fig. im Text. Leipzig und Berlin 1933, Verlag von B. G. Teubner. Preis geb. 14 M.

Man braucht die Vorzüge des Föpplschen Werkes, dessen 4. Band hier in 8. Auflage vorliegt, nicht erst aufzuzählen. Neben den beiden Söhnen des ursprünglichen Verfassers ist jetzt als Herausgeber auch A. Busemann genannt, der eine geschickte Auswahl hydrodynamischer Sätze unter Andeutung moderner Problemstellungen beigesteuert hat. Man kann nur feststellen, daß durch die Neubearbeitung das Buch vor dem Veralten völlig bewahrt geblieben ist.

Dr. PASCUAL **JORDAN**, Prof. a. d. Univ. Rostock. Statistische Mechanik auf quantentheoretischer Grundlage. Bd. 87 d. Sammlg. „Die Wissenschaft“, hrsg. v. W. Westphal. X + 110 S. Braunschweig 1933. Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges. Preis geh. 6.80 M, geb. 8.20 M.

Diese Einführung in die physikalische Statistik ist dadurch gekennzeichnet, daß, abgesehen von einem kurzen Einleitungskapitel, alle statistischen Ableitungen unmittelbar auf der Annahme quantenhafter Zustände aufgebaut sind. Die Darstellung geht auf die begrifflichen Grundlagen der Theorie und die mathematischen Beweise nicht tiefer ein, als in Lehrbüchern der Quantentheorie üblich ist, gibt aber ein für den Physiker ausreichend vollständiges Bild des gegenwärtigen Standes der statistischen Theorien in der Physik.

Dr. RICHARD v. **MISES**, Prof. a. d. Univ. Berlin. Fluglehre. Vorträge über Theorie und Berechnung der Flugzeuge in elementarer Darstellung. 4., erw. Aufl. VI + 400 S. m. 226 Textabb. Berlin 1933, Verlag von Julius Springer. Preis geh. 14.50 M, geb. 15.50 M. (Selbstanzeige.)

Die 4. Auflage unterscheidet sich von der vorhergehenden nur durch eine Reihe von Ergänzungen, die sowohl bei den theoretischen wie bei den praktischen Angaben des Buches eingefügt wurden. Es ist dabei auf die Literatur der letzten Jahre und auf die technischen Neuerungen in dem Maße Rücksicht genommen worden, wie es dem unverändert gebliebenen Rahmen des Buches entspricht. Trotz der angestrebten Beschränkung auf das Notwendigste ist dabei der Umfang des Textes und der Abbildungen abermals um etwa ein Viertel gestiegen.

Mises. 409

Dr.-Ing. FRITZ G. **ALTMANN**, Schraubgetriebe, ihre mögliche und ihre zweckmäßigste Ausbildung. 30 S. m. 73 Abb. Berlin 1932, VDI-Verlag. Preis kart. 5.30 M.

Die Arbeit bringt zunächst ganz allgemein grundlegende Betrachtungen über die Verzahnung von „Schraubgetrieben“ (Einzelverzahnung und Paarverzahnung) und eine Ordnung der „Globoide“. Da das Schraubgetriebe mit Globoid-Schraube (Schraube ohne Wälzmöglichkeit) gegenüber dem Getriebe mit Zylinderschraube und globoidischem Mutterrad (= das normale Schneckengetriebe) heute eine geringere praktische Bedeutung hat, ist den weiteren Untersuchungen das letztere Getriebe wegen seiner einfachen Herstellungsmöglichkeit zugrunde gelegt worden. Es werden daher Untersuchungen über die Schraubenflächen der Zylinderschrauben angestellt, vor allem hinsichtlich deren Erzeugungsmöglichkeiten, und dann auch ihre Bezeichnungsweise geklärt. Die bequem erzeugbaren Regelschraubenflächen werden eingehender behandelt, um die für den Betrieb zweckmäßigsten Schraubenflächen herauszufinden. Von den schiefen Regelschraubenflächen werden sowohl die geschlossene als auch die offene als Schraubenzahnflanke angenommen und besonders auf günstige Schmierungsverhältnisse der Flanken (Zustandekommen der Flüssigkeitsreibung)

hin untersucht. Altmann kommt dabei zu dem Ergebnis, daß die beiden heute praktisch wichtigen Getriebe, nämlich das in Deutschland fast ausschließlich verwendete Getriebe, dessen Schraube im Stirnschnitt archimedische Spiralen zeigt, und das in England hergestellte Getriebe, dessen Schraube im Stirnschnitt normale Evolventen zeigt, etwa gleich günstige Aussichten auf Druckerzeugung in der zwischen den Zahnflanken liegenden Schmierschicht bietet. — In diesem Zusammenhang sei besonders auf das mechanisch-fotografische Zylinderschnittverfahren hingewiesen. —

In einem weiteren Abschnitt wird die Herstellung der Evolventen-Schrauben und die Ausbildung des Fräsers für das Mutterrad erörtert, wobei gezeigt wird, daß es grundsätzlich möglich ist, die Mutterzähne auch mit einem kegeligen oder zylindrischen Werkzeug mathematisch genau zu schleifen.

In der vorliegenden Arbeit werden die Untersuchungen vorwiegend zeichnerisch durchgeführt, jedoch ist in einem besonderen Anhang noch die Möglichkeit gegeben, an Hand einer analytischen Darstellung der Schrauben- und Eingriffsflächen rein rechnerisch vorzugehen.

Die Arbeit schließt mit einem ausführlichen Literaturverzeichnis, und es ist besonders hervorzuheben, daß A. sich der Mühe unterzogen hat, das vorhandene Schrifttum einmal gründlich zusammenzustellen und, auf diesem aufbauend, die gestellten Aufgaben zu lösen. Daher bringt die Arbeit eine Fülle von neuen Erkenntnissen, die der Industrie dieser Getriebe manche Anregungen geben können; andererseits wird derjenige, der dieses Gebiet zu bearbeiten hat, daraus wertvolle neue Gedanken zur Weiterarbeit schöpfen können.

Dr.-Ing. WERNER **VOGEL**, Eingriffsgesetze und analytische Berechnungsgrundlagen des zylindrischen Schneckentriebes mit geradflankigem Schnecken-Achsenschnitt. Berlin 1933. Kommission VDI-Buchhandlung. 62 S. m. 52 Abb. im Text. Preis kart. 3,60 M.

Die Arbeit behandelt die Eingriffsgesetze lediglich des zylindrischen Schneckentriebes mit gerader, die Schneckenachse schneidender Erzeugender, d. h. das Schraubgetriebe, bei dem der Stirnschnitt eine archimedische Spirale liefert. V. legt, wie schon die Überschrift besagt, den geradflankigen Schneckenachsenschnitt zugrunde. „Der Verfasser hat es sich zur Aufgabe gemacht, zunächst einmal möglichste Klarheit der analytischen Beziehungen zu schaffen.“ Man kann sagen, daß dem Verfasser dies durch seine klare und anschauliche Darstellung gelungen ist. Er benutzt für alle Schneckentriebe die dimensionsfreien „Einheits-Schneckentriebe“ vom „Teil-Zylinderhalbmesser 1“.

Es werden die bisher bekannt gewordenen Forschungsergebnisse nachgeprüft, bestätigt und erweitert. An Hand der neu aufgestellten Formeln werden außerdem verschiedene neue zeichnerische Verfahren entwickelt, und die Möglichkeit geschaffen, die zeichnerischen Ergebnisse bis in alle Einzelheiten nachzurechnen. Dies gilt besonders für die Eingriffsfläche und das Eingriffsfeld.

Ein weiterer Abschnitt befaßt sich mit der Bestimmung von Größe, Richtung und Verteilung der Gleitgeschwindigkeiten; für deren Ermittlung gibt der Verfasser ein sehr einfaches rechnerisches und zeichnerisches Verfahren an. Denn die genauen Maße der Gleitgeschwindigkeit sind wichtig für die Beurteilung der Schmierungsfähigkeit. Diese neuen Untersuchungsmethoden über die Gleitgeschwindigkeit gelten auch für solche zylindrischen Schraubgetriebe, bei denen die Erzeugende beliebig gekrümmt ist.

Erwähnt sei noch das Verfahren zur Ermittlung der Unterschnittgefahr, das Zahndickengesetz einschließlich der vereinfachten zeichnerischen Ermittlung der Zahndicken.

Die Arbeit liefert neben manchem Bekannten in neuartiger Darstellung viel Neues, so daß sowohl der Theoretiker als auch der Praktiker manche Anregungen erhalten wird. Die Abbildungen im Text sind klar und verständlich und erhöhen den Wert des Buches.

EARLE **BUCKINGHAM**, Prof. für Normung und Meßtechnik am Massachusetts Institute of Technology. Stirnräder mit geraden Zähnen. Zahnformen, Betriebsverhältnisse und Herstellung. Deutsche Bearbeitung von Dipl.-Ing. Georg Olah. Berlin 1932. Verlag Julius Springer. VIII + 456 S. mit 215 Abb. im Text und 37 Tabellen. Preis geb. 32,50 M.

Die deutsche Bearbeitung des zuerst in Amerika erschienenen Werkes ist nicht allein eine Übersetzung schlechthin, sondern es wurden den deutschen Verhältnissen entsprechend verschiedene Abschnitte hinzugefügt. Außerdem wurden sämtliche Zahlenbeispiele, Tabellen und Formeln in das metrische Maßsystem umgerechnet.

Das Werk gliedert sich in drei große Abschnitte:

A) Die Zahnformen (S. 1—207).
B) Kraftübertragung durch Zahnräder (S. 208 bis 320).
C) Bearbeitung und Messung der Zähne (S. 321 bis 452).

Im Abschnitt A werden zunächst ganz allgemein Verzahnungsgrundlagen, Zykloidenverzahnungen besonders aber die Evolventen und ihre Eigenschaften besprochen, weiterhin der Überdeckungsgrad, das Wälzen und Gleiten und die Unterschneidung bei der Evolventenverzahnung. In einem Unterabschnitt „Evolvententrigonometrie“ wird ein neuer Begriff eingeführt: $\text{inv}\,\alpha = \text{tg}\,\alpha - \alpha$. Hierfür werden für die Werte von $0^0$—$60^0$ Zahlenwerte errechnet, mit deren Hilfe Aufgaben, die bei der Evolventenverzahnung auftreten, gelöst werden können. Die Behandlung des unterschnittfreien Satzverzahnungssystems, überhaupt die Behandlung der ganzen Verzahnungssysteme einschließlich der ausführlichen Rechenverfahren ist sehr breit. Mit Rücksicht auf den deutschen Leser und unter Zugrundelegung der deutschen Normblätter in ihrer Kürze und Klarheit hätte hier vielleicht noch mancher Abstrich erfolgen können.

Der Abschnitt B befaßt sich mit den Betriebsverhältnissen bei Rädergetrieben, mit der Bestimmung der Zahndrücke und mit der Bruch- und Abnutzungsfestigkeit der Zähne. Bei den Betriebsverhältnissen sei besonders auf die Ausführungen über die Geräuschbildung, die Schmierung und die Wärmeentwicklung hingewiesen. Die Ausführungen über Bruch- und Abnutzungsfestigkeit der Zähne sind besonders wertvoll, weil darin die amerikanischen Berechnungen über die Bruchfestigkeit der Zähne bis in die neueste Zeit berücksichtigt worden sind. Zu erwähnen sind noch die amerikanischen Untersuchungen über dynamische Zusatzbeanspruchungen und ein neues Berechnungsverfahren auf Grund dieser Versuche.

Mit Bezug auf den Abschnitt C kann das vorhandene Material zur Bearbeitung und Messung der Zähne besonders durch die zahlreichen noch hinzugefügten guten Abbildungen als lückenlos angesprochen werden.

Das deutsche Schrifttum erhält durch dieses Buch eine Bereicherung und wird auch als Nachschlagewerk mit Vorteil zu verwenden sein.

Dresden. K. A. Flocke. 412

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

**Die Elemente von Euklid.** Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Clemens THAER. I. Teil (Buch I—III) (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 235). 88 S. m. 103 Fig. Preis kart. 3.60 M. II. Teil (Buch IV—VI) (Ostwalds Klassiker Nr. 236). 75 S. m. 77 Fig. Preis kart. 3.20 M. Leipzig 1933, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H.

Dr. HEINRICH **BLASIUS,** Studienrat a. d. Techn. Staatslehranstalten zu Hamburg. Mechanik. Physikalische Grundlagen vom technischen Standpunkt. Zweiter Teil: Elastizität und Festigkeit. VIII + 143 S. m. 124 Abb. im Text. Hamburg 1933, Verlag von Boysen & Maasch. Preis geh. 4,50 M., geb. 5,70 M.

LEON **LICHTENSTEIN,** o. ö. Prof. d. Math. a. d. Univ. Leipzig, Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten. VII + 174 S. m. 4 Abb. Berlin 1933, Verlag von Julius Springer. Preis geh. 15.60 M.

Dr.-Ing. PAUL **NEMÉNYI,** Priv.-Doz. a. d. Techn. Hochschule Berlin, Wasserbauliche Strömungslehre. VIII + 275 S. m. 324 Fig. im Text. Leipzig 1933, Joh. Ambr. Barth. Preis geh. 28 M., geb. 29,80 M.

G. **TEMPLE,** Ph. D., D. Sc., Prof. of Mathematics in the University of London, King's College, and W. G. **BICKLEY,** D. Sc., Assistent Prof. of Mathematics in the University of London, Rayleigh's Principle and its Applications to Engineering. The Theory and Practice of the Energy Method for the Approximate Determination of Critical Loads and Speeds. IX + 156 S. m. 22 Fig. im Text. Oxford University Press. London: Humphrey Milford. 1933. Preis 14 sh.

GERHARD **KOWALEWSKI,** o. ö. Prof. der reinen Mathematik a. d. Techn. Hochschule Dresden. Integrationsmethoden der Lieschen Theorie (Bd. 15 d. Samml. „Mathematik und ihre Anwendungen in Monographien und Lehrbüchern" herausg. v. E. Artin und G. Kowalewski.) VIII + 221 S. Leipzig 1933, Akadem. Verlagsgesellschaft m. b. H. Preis geb. 18 M.

Dr.-Ing. KURT **BEYER,** ord. Prof. a. d. Techn. Hochschule Dresden. Die Statik im Eisenbetonbau. Ein Lehr- und Handbuch der Baustatik. Verfaßt im Auftrage des Deutschen Beton-Vereins. 2., vollst. neubearbeitete Aufl. Erster Band. VIII + 389 S. m. 572 Abb. im Text, zahlreichen Tabellen und Rechenvorschriften. Berlin 1933, Verlag von Julius Springer. Preis geb. 32.50 M.

Dr.-Ing. WILHELM **STAEDEL,** Dauerfestigkeit von Schrauben, ihre Beeinflussung durch Form, Herstellung und Werkstoff. Heft 4 der „Mitteilungen der Materialprüfungsanstalt an der Technischen Hochschule Darmstadt". Berlin 1933, VDI-Verlag G. m. b. H. VI + 102 S. m. 106 Abb. u. 14 Zahlentaf. Preis geh. 8 M., VDI-Mitgl. 7.20 M.

**Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik** herausgegeben von der Preuß. Akademie der Wissenschaften. Schriftleiter Georg FEIGL. Band $55_{II}$, Jahrgang 1929. Sonderheft I Geschichte, Philosophie, Pädagogik, Mengenlehre. 77 S. Preis geh. 9 M. Sonderheft II Arithmetik und Algebra. 65 S. Preis geh. 7.80 M. Berlin und Leipzig 1933, Walter de Gruyter & Co.

Tekn. Dr. JOHN-ERIK **EKSTROM,** Doz. a. d. Kgl. Techn. Hochsch. Rotebro (Schweden), Studien über dünne Schalen von rotationssymmetrischer Form und Belastung mit konstanter oder veränderlicher Wandstärke. Nr. 121 der Sammlung: Ingeniörsvetenskapsakademiens Handlingar. Stockholm 1933, Svenska Bokhandelscentralen A.-B. 205 S. m. 39 Abb.

**Luftfahrtforschung.** Berichte der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, Bln.-Adlershof, der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen, des Aerodynamischen Institutes der Techn. Hochchule Aachen usw. Bd. X, Nr. 2. 31 S. m. 22 Abb. München 1933, Verlag R. Oldenbourg. Preis geh. 6 M.

Dr. RUDOLF **ROTHE,** o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin. Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure. Teil IV: Übungsaufgaben mit Lösungen. Formelsammlung. Unter Mitwirkung von Stud.-Rat Oskar DEGOSANG, Ass. a. d. Techn. Hochschule Berlin. 2. Heft: Funktionen von zwei und mehr Veränderlichen, Differentialgeometrie ebener Kurven, Komplexe Zahlen, Veränderliche und Funktionen. 104 S. m. 46 Abb. im Text. Leipzig und Berlin 1933, Verlag B. G. Teubner. Preis kart. 2 M.

**Leipziger Vorträge 1933.** Magnetismus. Herausgeg. von Prof. Dr. P. DEBYE, Direktor des Physikalischen Instituts der Universität Leipzig. VII + 110 S. m. 47 Fig. Leipzig 1933, Verlag von S. Hirzel. Preis kart. 6 M.

**Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete.** Herausgegeben von der Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik". Zweiter Band. Berlin 1933, Verlag von Julius Springer.
3. Heft: A. **KOLMOGOROFF,** Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. V + 62 S. Preis 7.50 M.
4. Heft: A. **KHINTCHINE,** Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. V + 77 S. Preis 9.60 M.
5. Heft: C. C. **MACDUFFEE,** The Theory of Matrices. V + 110 S. Preis 13 M.

Dr. S. **IGUCHI,** Prof. a. d. Hokkaido Kaiserl. Univ. zu Sapporo, Japan, Eine Lösung für die Berechnung der biegsamen rechteckigen Platten. 56 S. m. 13 Textabb. u. 3 Taf. Berlin 1933, Verlag von Julius Springer. Preis kart. 5 M.

Dr. WALTER-ULRICH **BEHRENS,** Mathematische Methoden für Versuchsansteller auf den Gebieten der Naturwissenschaften, Landwirtschaft und Medizin. 136 S. m. 14 graph. Darstellungen. Stuttgart-S. 1933, Verlag von Eugen Ulmer. Preis kart. 8 M.

Prof. Dr. HUGO **DINGLER,** Direktor des wissenschaftstheoret. Inst. d. Techn. Hochsch. Darmstadt, Die Grundlagen der Geometrie, ihre Bedeutung für Philosophie, Mathematik, Physik und Technik. VIII + 76 S. Stuttgart 1933, Ferdinand Enke Verlag. Preis geh. 4.80 M.

Dr. phil. EBERHARD **ZSCHIMMER,** planm. a. o. Prof. d. Silikathüttenkunde a. d. Techn. Hochschule Fridericiana zu Karlsruhe, Philosophie der Technik, Einführung in die technische Ideenwelt. 3., völlig umgearb. Aufl. 87 S. m. ein. Porträttafel. Stuttgart 1933, Ferdinand Enke Verlag. Preis geb. 2.90 M.

# NACHRICHTEN

### Zum 70. Geburtstag Richard Molliers.

Den siebzigsten Geburtstag beging am 30. November der Geh. Hofrat, Prof. i. R. Dr. Dr. E. h. Richard Mollier in Dresden. Molliers Verdienste um die Entwicklung der technischen Thermodynamik, die in so hohem Maße dazu beigetragen haben, das Ansehen der Deutschen Wissenschaft zu vermehren und die seinen Namen in die ganze Welt getragen haben, sind so bekannt, daß es sich erübrigt, sie hier im einzelnen zu würdigen. Von 1897 bis 1933 hat Mollier als genialer Forscher und glänzender Lehrer an der Technischen Hochschule in Dresden gewirkt. In Würdigung seiner Verdienste hat ihn die Technische Hochschule in Braunschweig zum Ehrendoktor promoviert; der Verein Deutscher Ingenieure verlieh ihm als höchste Auszeichnung die Grashof-Denkmünze. Der Geburtstag dieses großen Gelehrten, der durch die Kraft seines Geistes und die Güte seines Herzens stets ein wahrer Führer der Jugend war, ist ein Festtag der Deutschen Wissenschaft.

Trefftz. 414

### Hans Reissner 60 Jahre alt.

Am 18. Januar 1934 begeht der o. Professor an der Technischen Hochschule Charlottenburg, Dr. Dr. E. h. Hans Reissner seinen sechzigsten Geburtstag. Reissner hat an der Entwicklung der Technischen Mechanik in den letzten dreißig Jahren hervorragenden Anteil gehabt. Er promovierte 1900 in Charlottenburg, habilitierte sich ebenda 1904, wurde 1906 an die T. H. Aachen berufen und wirkt seit 1912 an der T. H. Charlottenburg. — Auf fast allen Gebieten der Technischen Mechanik verdankt man Reissner bahnbrechende Arbeiten. Es sei nur an seine grundlegenden Arbeiten zur Theorie der Fachwerkschwingungen, der Schalenbiegung, der Statik und Dynamik der Flugzeuge, des Erddrucks und anderer Gebiete erinnert. Die Bedeutung der Flugwissenschaften als einer der ersten erkennend, gründete Reissner an der T. H. in Aachen das aerodynamische Laboratorium. Eine große Zahl von Anregungen, die die Entwicklung der Flugtechnik in Deutschland wesentlich gefördert haben, geht auf ihn zurück. In Würdigung dieser Verdienste hat die Technische Hochschule in Aachen ihn im Jahre 1929 zum Ehrendoktor promoviert. — Die Fachgenossen und zahlreichen Schüler, die Reissner als vornehmen Menschen ebenso schätzen wie als Wissenschaftler, werden seiner an seinem Geburtstage in Hochachtung und aufrichtiger Zuneigung gedenken.

Trefftz. 414

### Persönliches.

Prof. Dr. Richard v. Mises, bisher Direktor des Instituts für angewandte Mathematik an der Universität Berlin, hat eine Berufung als ordentlicher Professor der reinen und angewandten Mathematik und Direktor des zu begründenden mathematischen Instituts an die Universität Istanbul angenommen.

Frau Priv.-Dozent Dr. Hilda Pollaczek-Geiringer, bisher Oberassistentin am Institut für angewandte Mathematik der Universität Berlin ist zu wissenschaftlichen Forschungsarbeiten an die Université libre in Brüssel berufen worden.

Prof. Dr. W. Prager, früher in Göttingen, hat einen Ruf als ordentlicher Professor der Mechanik an die Universität Istanbul angenommen.

# ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

**„Die Berechnung der Gleichgewichtslage von gemessenen Schwingungen auf Grund der Fehlertheorie.“** Zu der Veröffentlichung von Max Schuler (diese Zeitschrift, 12, 1932, S. 152 bis 156, erlaube ich mir zu bemerken:

Eine Würdigung der verschiedenen in der Literatur angegebenen Formeln für die Bestimmung der Gleichgewichtslage findet sich in den beiden ersten Abschnitten meiner Veröffentlichung „Zur Analyse schwach gedämpfter Schwingungen“, Sitzungsberichte der Akademie Wien, Bd. 123, Abt. IIa, 1914, S. 767—799. Die von Herrn Schuler zitierte Stelle in den „Mitteilungen für das Markscheidewesen“ 1917 ist ein nicht von mir verfaßter Bericht über die erwähnte Arbeit.

Auch die Autoren, die sich früher mit der behandelten Frage befaßt haben, hatten physikalische Fragen (Wägungen) vor Augen. So vor allem B. Weinstein, der das System der Normalgleichungen für die Korrektionen erster Näherungswerte von Gleichgewichtslage, Anfangsamplitude und Dämpfungsfaktor angegeben hat. (Handbuch der physikalischen Maßbestimmungen, 2. Bd. Berlin 1888, S. 418.) Den von J. Ph. Herr und W. Marek für die Bestimmung der Gleichgewichtslage einer Schwingung aus Umkehrpunktsbeobachtungen aufgestellten Formeln lag der gleiche Gedanke zugrunde, wie den Formeln von M. Schuler nämlich der der Bildung von Gruppen aufeinanderfolgender Umkehrpunktsbeobachtungen, die jede zur Berechnung einer Gleichgewichtslage dienen. Das arithmetische Mittel der aus den einzelnen Gruppen gerechneten Gleichgewichtslagen gilt als endgültiges Ergebnis. Die W. Marek zugeschriebene Formel ergibt sich aus der Schulerschen Gl. (3) für $\nu = 4$, die J. Ph. Herrsche für $\nu = 5$. (Über das Verhältnis des Bergkristallkilogrammes, welches bei Einführung des metrischen Maßes und Gewichtes das Urgewicht in Österreich bilden soll, zum Kilogramm der Kaiserlichen Archive zu Paris. Wien 1870.) Bei der Methode der Gruppenbildung wird gegen eine Grundforderung der Ausgleichsrechnung verstoßen, die Methode der kleinsten Quadrate ausschließlich auf direkt beobachtete Größen — das sind einzig und allein die Umkehrpunktslesungen — anzuwenden. Ob die Abweichungen der Umkehrspunktlesungen von widerspruchsfreien Werten, die die Gesetze der gedämpften harmonischen Bewegung streng erfüllen, von Beobachtungsfehlern oder von Störungen, die gleichfalls Zufallscharakter besitzen, hervorgerufen werden, ist bedeutungslos. Es handelt sich darum, die Parameter einer Bewegung der vorgegebenen analytischen Form zu finden, die sich den beobachteten Umkehrsbeobachtungen am engsten anpaßt.

In meiner früher erwähnten Veröffentlichung habe ich in Abschnitt III die für den Fall schwacher Dämpfung aus den Umkehrpunktsbeobachtungen durch Ausgleich sich ergebenden Formeln für die Gleichgewichtslage angegeben. Übereinstimmend mit der Auffassung von Herrn Schuler ist hierbei die „schwache Dämpfung“ dadurch gekennzeichnet, daß Glieder, die in bezug auf die Differenz zwischen Eins und dem Dämpfungsfaktor von höherer als der ersten Ord-

nung sind, vernachlässigt werden können, so daß an Stelle der geometrischen Reihe der aufeinanderfolgenden Amplituden eine arithmetische Reihe tritt. Die bei ungerader Zahl beobachteter aufeinanderfolgender Umkehrpunkte sich ergebenden Formeln stehen mit der bekannten auch von Herrn Schuler erwähnten Regel von F. Kohlrausch

$$G = \frac{1}{2}\{M(a_l) + M(a_r)\}$$

in vollem Einklang. Für eine gerade Anzahl beobachteter aufeinanderfolgender Umkehrpunkte erhielt ich die Gleichung

$$G = \frac{1}{\nu(\nu^2-4)} \sum_{i=1}^{\nu} [\nu^2 - 1 + 3(\nu - 2i + 1)(-1)^i] a_i,$$

in der jede Umkehrpunktslesung mit einem desto größeren Faktor multipliziert ist, je näher der betreffende Punkt der Gleichgewichtslage liegt. Dieser Faktor darf aber ja nicht mit dem Gewicht der Beobachtung verwechselt werden, das für alle Umkehrpunkte das gleiche ist. Für $\nu = 4$ gibt diese Gleichung die W. Mareksche Formel, die — was außer für den nicht überbestimmten Fall ($\nu = 3$) ausschließlich für $\nu = 4$ gilt — übereinstimmend sowohl aus der Methode der Gruppenbildung als auch aus der von M. Thiesen aufgestellten Bedingung kleinsten systematischen Fehlers (Abweichung zwischen geometrischer und arithmetischer Reihe bei stärkerer Dämpfung) hervorgeht. (Trav. et mém. Bureau int. des poids et mésures. Paris 1886.) Daß die Methode der Gruppenbildung — deren Ergebnis für $\nu = 5$ (Herrsche Formel) von dem Kohlrauschschen Ergebnis nur wenig abweicht und auch nur ein um wenig kleineres Gewicht besitzt — eine schnelle und sofort einen Überblick über Fehler oder Vorhandensein von Störungseinflüssen liefernde Rechenweise darstellt, durch die man schon während des Versuches auf allenfalls aufgetretene grobe Fehler oder Störungen aufmerksam wird, sei ohne weiteres zugegeben.

Die Frage, ob gerade oder ungerade Beobachtungszahlen vorzuziehen sind, beantwortet sich derart, daß es vom Standpunkt des Ausgleiches zufälliger Fehler nicht zweckmäßig erscheint, von einer ungeraden Beobachtungszahl zur nächst höheren geraden überzugehen, daß hingegen die gerade Beobachtungszahl vom Standpunkt des Niedrighaltens der systematischen Fehler bei gleichzeitigem Ausgleich der zufälligen Fehler und Störungseinflüsse, also bei nicht sehr schwacher Dämpfung, vorzuziehen ist. (Vergleiche meine früher zitierte Veröffentlichung.)

Wien. A. Basch. 351 a

**Erwiderung.** Die Ausführungen von A. Basch im Sitzungsbericht der Akademie zu Wien. Bd. 123 sind sehr wertvoll. Sie behandeln aber einen andern Fall als meine Rechnungen in dieser Zeitschrift Bd. 12, S. 152. Basch setzt voraus, daß die Schwingungsamplituden streng nach einer arithmetischen oder geometrischen Reihe abfallen und die Fehler der beobachteten Umkehrpunkte gegen diese Reihe durch Ablesungen der Umkehrpunkte entstehen, während die Konstanten des schwingenden Systems selbst wie Gleichgewichtslage, Schwingungszahl, mittlere Amplitude und Dämpfung fehlerfrei sind.

Ich dagegen habe angenommen, daß die Beobachtungen der Umkehrpunkte in erster Näherung fehlerfrei sind und die Abweichungen zwischen Beobachtungen und theoretisch idealer Schwingungskurve durch kleine Störungen entstehen, die auf das schwingende System einwirken. Solche Störungen können z. B. erzeugt werden von Luftbewegungen, Schwankungen der Temperatur oder der Dämpfungskräfte und mitschwingende andere Systeme. Ferner setze ich nicht nur den „Umkehrpunkt", sondern den ganzen „Schwingungsbogen" als beobachtet voraus. D. h., die Schwingungsbogen muß man so weit verfolgen, bis die Gewißheit entsteht, daß kein weiterer Umkehrpunkt zwischen den abgelesenen Umkehrpunkten liegt. Dies ist bei Messungen wohl immer der Fall, wenn man dann auch den Umkehrpunkten ein so großes Beobachtungsgewicht beilegt, daß man sie der Auswertung des einzelnen Schwingungsbogens und seiner Gleichgewichtslage allein zugrunde legt.

Jede Gleichgewichtslage des einzelnen Schwingungsbogens ist eine indirekte Beobachtung. Es fragt sich nun, ob wir die Regeln der Ausgleichungsrechnung auch auf solche indirekten Beobachtungen anwenden dürfen. Dies ist meiner Ansicht nach der Fall, wenn die Beobachtungen unabhängig voneinander sind. Nehmen wir an, daß die Fehler der Gleichgewichtslage durch kleine Stöße erzeugt werden, die nach dem Gaußschen Fehlergesetz verteilt sind, so ist jeder Schwingungsbogen fehlerunabhängig von dem andern, denn ein Stoß kann immer nur einen einzigen Schwingungsbogen stören; denn die folgenden Schwingungen verlaufen wieder gesetzmäßig. Selbst in dem Sonderfall, daß der Störungsstoß genau im Umkehrpunkt das schwingende System trifft, kann er nicht beide Schwingungsbögen stören, denn dann erzeugt er überhaupt keinen Fehler in der errechneten Gleichgewichtslage, sondern er stört nur die Schwingungszeit, die aber hier nicht ermittelt werden soll. Jeder Umkehrpunkt mit Ausnahme der beiden Endpunkte wird bei der Auswertung von zwei Schwingungsbogen verwendet. Die Ablesefehler eines Umkehrpunktes gehen also in zwei Bogenberechnungen gleichmäßig ein, und die beiden berechneten Bogen sind in dieser Beziehung nicht unabhängig. Überwiegen also die Beobachtungsfehler, dann wird bei meinen Gruppenformeln der mittlere Fehler zu klein bestimmt, worauf ich auch in meiner Arbeit hingewiesen habe. In diesem Falle sind die Formeln von Basch vorzuziehen. Bei den modernen Ablesegeräten mit Spiegel und Fernrohr oder mit Mikroskop wird aber der Beobachtungsfehler meist kleiner als der Störungsfehler der Schwingungen sein. Darum halte ich die von mir vorgeschlagenen Formeln (Gl. 1, Gl. 3 und Gl. 5) für die richtigen.

Im Falle der gedämpften Schwingung (Fall b und c) habe ich den kleinsten Schwingungsbogen, aus dem sich die Gleichgewichtslage bestimmen läßt, d. i. eine Vollschwingung mit 3 Umkehrpunkten, der Ausgleichung zugrunde gelegt. Damit auch hier die einzelnen Schwingungsbogen völlig unabhängig voneinander wären, hätte ich für die Ausgleichung wählen müssen: $a_1 - a_2 - a_3$; dann: $a_3 - a_4 - a_5$ usw. Ich habe aber bei der Auswertung auch den dazwischenliegenden Bogen $a_2 - a_3 - a_4$ mit benutzt. Dies hat den Zweck, die systematischen Fehler, die durch die Dämpfung hereinkommen, möglichst klein zu halten. Solche systematischen Fehler entstehen immer, wenn die Reibung nicht genau proportional der Geschwindigkeit ist, wie dies der mathematische Ansatz verlangt. Sie gehen nach rechts oder links, je nachdem man die Auswertung mit einer geraden oder ungeraden Amplitude beginnt. Durch das Überlagern beider Gruppen (entsprechend Gl. 3 und Gl. 5) werden diese systematischen Fehler bei dem Endresultat am kleinsten. Dieser Gewinn ist größer als der Schaden, der

durch die Benutzung zweier nicht völlig unabhängiger Beobachtungsreihen entsteht, ohne daß die Diskussion über deren Abhängigkeit vollkommen durchgeführt ist. Ich glaube deshalb, daß meine Gl. 5 die plausibelste Gleichgewichtslage bei einer stark gedämpften Schwingung ergibt.

Herr Basch hat recht, daß nach Gl. 5a nur $(\nu - 2)$ Gleichgewichtslagen bestimmt werden können, falls man bei jedem Schwingungsbogen das Dämpfungsverhältnis unabhängig bestimmt. Die Einführung des Dämpfungsverhältnisses hat aber doch den Zweck, den systematischen Fehler, der durch die Reibung bei der Bestimmung der Gleichgewichtslage entsteht, möglichst klein zu halten. Dieses Dämpfungsverhältnis können wir ohne Kenntnis der Gleichgewichtslage abhängig von der Amplitude bestimmen. Die einzelnen Messungen werden aber Unregelmäßigkeiten zeigen, weil sich über die Reibungskräfte die Störungsstöße lagern. Die wahrscheinlichsten Reibungseinflüsse werden durch die ausgeglichene Funktionskurve $(\varkappa = f(a))$ dargestellt. Diese kann man durch getrennten Ausgleich bestimmen und wird dies auch stets machen, wenn $\varkappa$ eine Konstante ist. Bei jedem Schwingungsbogen wird man dann mit Hilfe dieses wahrscheinlichsten Wertes von $\varkappa$ den systematischen Fehler, der durch die Reibungskräfte auf die Gleichgewichtslage entsteht, am günstigsten eliminieren und so die wahrscheinlichste Gleichgewichtslage dieses einen Schwingungsbogens erhalten. In diesem Falle, d. h. bei getrennt ausgeglichenen $\varkappa$, lassen sich $(\nu - 1)$ Werte der Gleichgewichtslage berechnen.

Vor allem möchte ich betonen, daß die bisher bekannten Formeln nur die Bestimmung der Gleichgewichtslage bei sehr schwacher Dämpfung ermöglichen, während meine Formeln 5a und 5b auch bei beliebig großer Dämpfung angewendet werden können.

Göttingen. M. Schuler. 351

**Über die Berechnung von Kegelschalen mit linear veränderlicher Wandstärke.** In Bd. 12, Heft 6 dieser Zeitschrift wurde von Herrn E. Lichtenstern eine Methode zur näherungsweisen Festigkeitsberechnung von Kegelschalen mit dem Wandstärkengesetz $h = b \cdot s$ unter axensymmetrischer Belastung angegeben. ($2h$ ist die Wandstärke, $s$ die von der Spitze aus gemessene Meridianlänge, $b$ der Wandstärkenparameter.) Diese Theorie ist längst überholt, denn es gibt für diesen Kegel bereits eine exakte Lösung der Differentialgleichungen des Schalenproblemes von Meißner[1]), die elementar ist und gegen welche die neue Theorie keine Vereinfachung bringt.

Diese von Meißner hingestellte Lösung, deren Wiedergabe hier aus Raummangel nicht möglich ist, hat Geckeler[2]) ganz unabhängig aus anderen Gesichtspunkten und für andere Zwecke, nämlich zur angenäherten Berechnung axensymmetrischer Schalen beliebiger Meridianform abgeleitet und sogar in Formeln für die praktische Berechnung gebracht. Auf die Identität der Meißnerschen und Geckelerschen Lösungen wird demnächst in einer von mir erscheinenden Schrift: „Zur Berechnung der durch Druck belasteten Deckel und Böden" ausführlich hingewiesen werden.

Auch die Partikulär-Lösungen gen. Differentialgleichungen, welchen Flächenbelastungen und eine Belastung durch axial gerichtete Randkräfte entsprechen, sind nach Meißner elementar für die praktisch wichtigen Belastungsfälle.

Herr Lichtenstern scheint die gen. strenge Lösung von Meißner nicht zu kennen.

Göttingen. F. Schultz-Grunow. 342.

1) E. Meißner: Über Elastizität und Festigkeit dünner Schalen. Vierteljahrsschrift der naturforschenden Ges. Zürich, 1915, Jahrg. 60, S. 23.

2) J. Geckeler: Über die Festigkeit axensymmetrischer Schalen. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 276.

**Erwiderung.** Als Entgegnung auf die Zuschrift des Herrn Dipl.-Ing. F. Schultz-Grunow führe ich wörtlich einige Stellen aus dem Werke von Dr. F. Dirschinger (Schalen und Rippenkuppeln, Handbuch für Eisenbeton, 3. Aufl. XII. Band, 1928) an, die sich teilweise an Berichte von L. Föppl und J. Geckeler anlehnen:

... . . E. Meißner ist es geglückt, diese Differentialgleichungen 4. Ordnung, die für alle Schalen mit Achsensymmetrie gelten, für die Kugel, den Kegel, die Ringfläche und den Zylinder in zwei symmetrisch gebaute Differentialgleichungen 2. Ordnung zu spalten, mit deren Hilfe das allgemeine Integral angegeben werden kann . . . Diese Theorien sind jedoch derartig kompliziert, daß sie auch in den einfacheren Fällen kaum angewendet werden. Aus diesen Ursachen . . . Bedürfnis nach . . . Näherungslösungen . . .

Ferner:

„Für die Kegel-, Kugel-, Zylinder- und Ringschale gleicher Wandstärke bestehen strenge Lösungen. Diese . . . erfordern . . . einfachsten Fällen . . . großen Aufwand an Zahlenrechnungen. Für beliebige Rotationsschalen, insbesondere bei wechselnder Wandstärke . . . bis jetzt . . . strenge Lösung nicht gelungen, so . . . daß man in diesen Fällen auf Näherungslösungen angewiesen ist."

Schließlich:

„J. Geckeler geht bei seiner Näherungslösung von den Grundgleichungen aus, die von Love, Reissner, Meißner aufgestellt wurden . . ."

Hiermit würde sich auch ein Nachweis der ‚Identität' der Meißnerschen und Geckelerschen Lösungen erübrigen.

Prag. E. Lichtenstern. 342a.

Mit dem vorliegenden Heft legt Professor Dr. v. Mises, der die Zeitschrift begründet und dreizehn Jahre hindurch geleitet hat, mit Rücksicht auf seine Übersiedlung nach Istanbul, die Schriftleitung nieder und scheidet als Herausgeber aus. An seine Stelle tritt Professor Dr. Erich Trefftz, Dresden.

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. von Mises, Berlin NW 87, Siegmundshof 9;
für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 21. — Copyright 1933 by VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7.
Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.